QCM - VRAI - FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin x$.

   f réalise une bijection de I sur $[-1, 1]$.

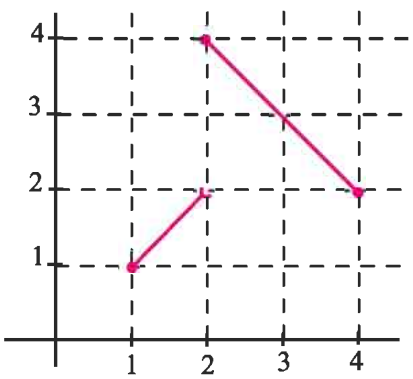
   ☐ $I=[0, 2\pi]$. ☐ $I=[0, \pi]$. ☐ $I=\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x)=\cos x$.

   $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)$ est égal à

   ☐ $\frac{2}{\sqrt{3}}$. ☐ -2. ☐ $-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

3. Soit f une fonction dont la représentation graphique est ci-contre. f réalise une bijection de



   ☐ $[1, 4]$ sur $[1, 4]$.

   ☐ $[1, 2]$ sur $[1, 2]$.

   ☐ $[1, 3]$ sur $[1, 3]$.

4. La fonction $f: x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est dérivable sur

   ☐ $[0, +\infty[$. ☐ $]0, +\infty[$. ☐ $\mathbb{R}^*$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$ telle que $f(1)=2$ et $\lim\limits_{+\infty} f=3$.

   Alors f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[2, 3[$.

2. Toute fonction affine réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout réel $x>0$, $\sqrt[4]{x} \geq \sqrt[3]{x}$.

4. La fonction réciproque de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt[n]{x}$ est dérivable à droite en 0.

5. Si f est strictement monotone et dérivable sur un intervalle I et si f garde un signe constant sur I, alors sa réciproque garde un signe constant sur $f(I)$.

1 Montrer, dans chacun des cas, que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on précisera. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

1. $f(x)=1-4x$; $I=]-\infty,1]$.

2. $f(x)=x^2-4x+1$; $I=[2,+\infty[$.

3. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$; $I=]-1,+\infty[$.

4. $f(x)=\sqrt{x-3}+x$; $I=[3,+\infty[$.

2 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=ax+b$ où a et b sont deux réels tels que $a\neq 0$.

1. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer a et b pour que $g^{-1}=g$.

3 Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}x^4-x^2$.

1. Etudier f et tracer sa courbe représentative C_f dans un repère orthonormé.
2. a. Montrer que f réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
b. Tracer dans le même repère la courbe représentative de sa fonction réciproque f^{-1}.
c. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

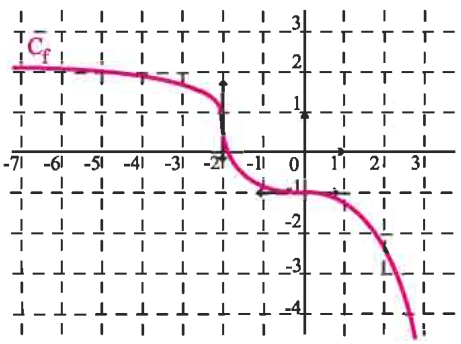
4 Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\cos(\pi x)$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Tracer dans le même repère les courbes représentatives de chacune des fonctions f et f^{-1}.
3. Montrer que pour tout x de J, $f^{-1}(x)+f^{-1}(-x)=1$. Interpréter graphiquement.

5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{4+x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

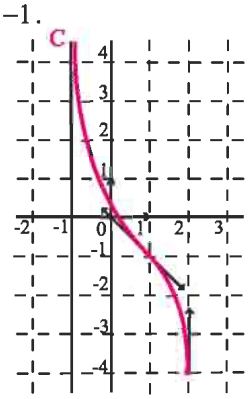
1. Etudier la dérivabilité de f en 0.
2. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.
Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur J.
b. Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6 Le graphique ci-dessous représente la courbe d'une fonction f bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.



On désigne par g la fonction réciproque de f.
1. Que peut-on dire de la dérivabilité de g en -1 et en 1 ?
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Reproduire la courbe de f et représenter dans le même repère la courbe de g.

7 Le graphique ci-dessous représente la courbe C d'une fonction f bijective de $]-1,2]$ sur $[-4,-\infty[$.
La courbe C admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$.



On désigne par g la fonction réciproque de f.
1. Que peut-on dire de la dérivabilité de g en -1 et en -4 ?
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Reproduire la courbe de f et représenter dans le même repère la courbe de g.

8 A/ Soit g la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ par $g(x)=\sin(2x)-x$.

1. Etudier les variations de g.

2. Montrer que l'équation $\sin(2x)=x$ admet une unique solution α dans $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$.

B/ Soit f la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ par $f(x)=\sin(2x)$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Ecrire une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

b. Montrer que l'origine du repère est un point d'inflexion de la courbe C_f.

2. Etudier f et tracer C_f.

3. a. Montrer que f réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ sur $[-1, 1]$.

On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et $C_{f^{-1}}$ la courbe représentative de f^{-1}.

b. Tracer $C_{f^{-1}}$ dans le même repère.

4. Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $]-1, 1[$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

9 Soit la fonction f définie sur $[0, 1[$ par $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$.

1. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement.

b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

c. Tracer C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2. Montrer que f réalise une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle I à préciser.

On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et $C_{f^{-1}}$ la courbe représentative de f^{-1}.

3. a. La fonction f^{-1} est-elle dérivable à droite en 0 ?

b. Calculer $f^{-1}(x)$, pour tout réel x de I.

c. Tracer $C_{f^{-1}}$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

10 Soit f la fonction définie sur $[-1, 1[$ par $f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[$ et calculer $f'(x)$.

b. Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 et interpréter graphiquement.

c. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et interpréter graphiquement.

d. Dresser le tableau de variation de f.

2. a. Ecrire une équation de la tangente T à C_f en son point A d'abscisse 0.

b. Etudier la position relative la position relative de C_f et T. Construire C_f et T.

3. a. Montrer que f réalise une bijection de $[-1, 1[$ sur un intervalle J.

On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et $C_{f^{-1}}$ sa représentation graphique.

b. Tracer $C_{f^{-1}}$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de f.

2. a. Montrer que le point $I(-1, 0)$ est un centre de symétrie de C_f.

b. Montrer que I est un point d'inflexion de C_f.

3. a. Montrer que la droite $\Delta: y=x$ coupe C_f en un seul point d'abscisse α et que $0<\alpha<1$.

b. Déterminer la position relative de la courbe C_f et la droite Δ.

4. Construire C_f et sa tangente T au point I.

5. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et $C_{f^{-1}}$ sa représentation graphique.

b. Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

12 Soit g la fonction définie sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ par $g(x)=\tan(\pi x)$.

1. Etudier g et tracer sa courbe C_g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2. Montrer que g réalise une bijection de I sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-\infty,0[$.

4. Soit G la fonction définie sur $]-\infty,0[$ par $G(x)=g^{-1}(x)+g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

a. Montrer que G est dérivable sur $]-\infty,0[$ et déterminer $G'(x)$.

b. En déduire que pour tout x de $]-\infty,0[$, $g^{-1}(x)=-\frac{1}{2}-g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

13 Soit h la fonction définie sur $]0,\pi]$ par $h(x)=\operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right)$.

1. Montrer que h réalise une bijection de $]0,\pi]$ sur $\mathbb{R}_+$.

On note φ sa fonction réciproque.

2. a. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\varphi'(x)=\frac{-2}{1+x^2}$.

b. On désigne par Ψ, la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\psi(x)=\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.

Calculer la dérivée de la fonction Ψ sur $]0,+\infty[$.

c. Calculer $\varphi(1)$ et en déduire que pour tout $x>0$, $\varphi(x)+\psi(x)=\pi$.

14 A/ Soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2. On désigne par g la restriction de f à $[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

a. Montrer que g réalise une bijection de $[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$ sur I que l'on déterminera.

On notera g^{-1} la fonction réciproque de g.

b. Donner les propriété de g^{-1} et déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de I.

3. Soit la suite (u_n) définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $0\le u_n\le\frac{1}{2}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

15 Pour tout entier naturel $n\ge 2$, on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+...+x-1$.

1. Montrer que f_n réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[-1,n-1]$.

2. a. En déduire que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution α_n dans $]0,1[$.

b. Montrer que pour tout $n\ge 1$, $(\alpha_n)^{n+1}=2\alpha_n-1$.

3. a. Montrer que la suite (α_n) est décroissante.

b. En déduire que la suite (α_n) est convergente et calculer sa limite.

16 A/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x+\sqrt{x^2+8}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x$.

b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Etudier les variations de f.

3. Monter que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et $C_{f^{-1}}$ sa représentation graphique.

4. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=x$.

b. Préciser les coordonnées des points d'intersection de C_f et $C_{f^{-1}}$.

5. Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

B/ 1. Montrer que $f([1,2])\subset[1,2]$.

2. Montrer que $|f'(x)|\le\frac{2}{3}$, pour tout x de $[1,2]$.

3. Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0=1, \\ u_{n+1}=f(u_n),\ n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $1\le u_n\le 2$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, $\left|u_{n+1}-\sqrt{\frac{8}{3}}\right|\le\frac{2}{3}\left|u_n-\sqrt{\frac{8}{3}}\right|$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{\frac{8}{3}}$.

17 1. Simplifier les nombres ci-dessous.

$x=\frac{\sqrt[3]{3}.\sqrt{27}.\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{81}}$; $y=\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{32}}$; $t=\sqrt[3]{8^2}$.

2. Montrer que $\frac{\sqrt[3]{1024}.\sqrt{\sqrt{64}}.\sqrt[5]{7776}}{\sqrt{18}\sqrt[3]{\sqrt{256}}}=16$.

3. a. Développer $(2+\sqrt{5})^3$.

b. Simplifier $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}-\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$.

18 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous.

1. $\sqrt[3]{x}=\sqrt[4]{2}$.
2. $\sqrt[5]{x^2}=\sqrt[3]{3}$.
3. $\sqrt[3]{x^2}-3^3\sqrt{x}+2=0$.
4. $\left(1-\sqrt[4]{x}\right)^3+8=0$.

19 Calculer les limites ci-dessous.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2-x+1}$; $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[3]{\frac{x^2+x}{\sin x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt[3]{x}$;

$\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}$.

20 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=x^2+\sqrt[4]{x}$.

1. Etudier les variations de f.

2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On notera f^{-1} la fonction réciproque de f.

3. Tracer les courbes de f et de f^{-1} dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

21 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=x\sqrt[3]{x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

2. a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f'(x)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$.

3. Etudier les variations de f.

4. Ecrire une équation de la tangente à C au point d'abscisse 1. Tracer C.

5. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. On désigne par h la fonction réciproque de f.

b. Montrer que h est dérivable en 1 et calculer $h'(1)$.

c. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la droite $\Delta: y=x$ et de C.

d. Tracer la courbe de h.

22 Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt[4]{x^2-1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Vérifier que f est une fonction paire.

2. a. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $f(x) = \sqrt{x}\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}}$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

3. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.

b. Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

c. Etudier les variations de la fonction f.

4. a. On désigne par Δ la droite d'équation $y = x$. Etudier la position relative de la courbe C_f et de la droite Δ.

b. Tracer la courbe C_f.

5. a. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

c. Tracer la courbe C' de f^{-1} dans un même repère.

23 A/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{x}{3} + 3$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Monter que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3}\right) + 3$.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c. Etudier la nature de la branche infinie de C_f.

2. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

b. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$.

c. Etudier les variations de la fonction f.

d. Montrer que l'équation $f(x) = 0$, admet une unique solution α dans $\mathbb{R}_+^*$.

Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

e. Tracer la courbe C_f.

24 A/ Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^{2n+1} + 3x - 2$.

On note C_n la courbe de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Dresser le tableau de variation de f_n.

b. Montrer que le point $I(0,-2)$ est un centre de symétrie de C_n.

c. Déterminer le point d'inflexion de C_n.

2. a. Etudier la position relative de C_n et C_{n+1}.

b. En déduire que toutes les courbes C_n passent par trois points fixes I, A et B que l'on déterminera.

3. a. Montrer que f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b. Etudier la dérivabilité de f_n^{-1} sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f_n^{-1})'(-6)$, $(f_n^{-1})'(-2)$ et $(f_n^{-1})'(2)$.

4. a. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n et que $0 < x_n < \frac{2}{3}$.

b. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $x_n = \frac{2 - x_n^{2n+1}}{3}$.

c. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leq x_n^{2n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}$.

d. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^{2n+1}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

B/ On suppose que $n = 1$.

On désigne par f la fonction f_1 et par α le réel x_1.

1. Soit la fonction φ définie sur $[0,\frac{2}{3}]$ par $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

a. Montrer que $\varphi\left([0,\frac{2}{3}]\right) \subset [0,\frac{2}{3}]$.

b. Montrer que pour tout x de $[0,\frac{2}{3}]$, $\varphi(x) - \alpha = (x-\alpha)^2 \frac{(2x+\alpha)}{3(x^2+1)}$.

c. Montrer que pour tout x de $[0, \frac{2}{3}]$,

$\frac{(2x+\alpha)|x-\alpha|}{3(x^2+1)} \leq \frac{2}{3}$.

d. En déduire que pour tout x de

$[0, \frac{2}{3}], |\varphi(x)-\alpha| \leq \frac{2}{3}|x-\alpha|$.

2. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$0 \leq u_n \leq \frac{2}{3}$.

b. Montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n-\alpha|$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers α et vérifier que $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$.

25 A/ Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par

$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$.

On désigne par C_1 sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
b. Etudier les variations de f.
c. Ecrire une équation de la tangente T à C_1 au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
d. Tracer C_1 et T.
2. Sur le même graphique, tracer C_2 la courbe représentative de la fonction $(-f)$.
3. Soit $C = C_1 \cup C_2$. Montrer que C a pour équation cartésienne $x(x^2+y^2) - y^2 = 0$.

B/ Soit A le point de coordonnées $(1, 0)$, $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[OA]$ et Δ la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.
Une droite D passant par O, recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en N et la tangente Δ en Q. On désigne par M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NQ}$. On désigne par Γ l'ensemble des points M lorsque la droite D varie.
1. Donner une équation cartésienne de Δ et $\mathscr{C}$.
2. On désigne par m le coefficient directeur de la droite D. Ecrire une équation cartésienne de D.
3. a. Montrer que les coordonnées de N sont

$\left(\frac{1}{1+m^2}, \frac{m}{1+m^2}\right)$.

b. En déduire que les coordonnées de M sont

$\left(\frac{m^2}{1+m^2}, \frac{m^3}{1+m^2}\right)$.

c) Vérifier que M appartient à la courbe C.
4. Soit $M(x, y)$ un point de C.

a) Montrer que si $x = 0$ alors $M \in \Gamma$.

b) On suppose que x est non nul et on pose $m = \frac{y}{x}$.

Exprimer x et y en fonction de m.
En déduire que M appartient à Γ.
c. Montrer que $\Gamma = C$.

C/ Soit t un réel strictement positif et D_t la droite d'équation $y = tx$.

La droite D_t coupe Γ en M et Δ en Q.

La droite (AM) coupe l'axe des ordonnées en P.

1. a. Montrer que les coordonnées de P sont $(0, t^3)$.

b. Vérifier que $AQ = t$.

2. En déduire une construction d'un segment de longueur $\sqrt[3]{t}$, en utilisant la courbe Γ.

26 A/ Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

1. a. Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$.

On notera f^{-1}, la fonction réciproque de f.

b. Calculer $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. a. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0, 1[$.

b. Calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)$.

c. Montrer que pour tout x de $[0, 1[$,

$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$.

3. Tracer dans un repère orthonormé C_f et $C_{f^{-1}}$.

4. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $f\left(\frac{1}{n^2}\right) \le v_n \le f\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) En déduire que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

5. Montrer que l'équation $\frac{1}{f(x)} = \frac{\pi}{2}x$ admet une unique solution α dans $]0, 1[$. Vérifier que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

B/ 1. Soit la fonction g définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $g(x) = f^{-1}(\sin x) + f^{-1}(\cos x)$.

a. Montrer que g est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $g'(x)$.

b. Montrer que pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f^{-1}(\sin x) + f^{-1}(\cos x) = 1$.

2. Soit h la fonction définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ par $h(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

a. Etudier les variations de h et dresser son tableau de variation.

b. En déduire $h\left([0, \frac{1}{2}]\right)$.

3. Soit la fonction k définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ par $k(x) = f^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

Montrer que k est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$ et calculer $k'(x)$. En déduire que pour tout x de $[0, \frac{1}{2}]$, $f^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2f^{-1}(x)$.

27 A/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Montrer que f est continue à droite en 0.
b. Montrer que f est dérivable à droite en 0.
c. Etudier la position de C_f par rapport à sa demi-tangente au point d'abscisse 0.
d. Etudier les variations de f.
e. Etudier la nature de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$ puis construire C_f.

2. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J à déterminer.

b. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

c. Construire la courbe C' de la fonction f^{-1} dans le même repère.

B/ On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $[0, 1]$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$, $n \ge 0$.

1. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 < u_n \le 1$.

b. Vérifier que $g(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$, $x \in]0, 1]$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \le \frac{1}{2}u_n$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \le \frac{1}{2^n}$, puis que (u_n) est convergente.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{2u_{n+1}}{1-(u_{n+1})^2}$.

b. En déduire que $u_n = \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$.

3. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = 2^n.u_n$, $n \in \mathbb{N}$.. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

28 A/ Soit f la fonction définie sur $I=[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x)=\sqrt{1+\tan x}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Montrer que f est dérivable sur $I=]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $f'(x)$.

b. Etudier la dérivabilité de f à droite en $-\frac{\pi}{4}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c. Dresser le tableau de variation de f et construire C_f.

2. a. Montrer que f réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J à préciser.

b. On désigne par g la bijection réciproque de f. Calculer $g(0)$, $g(1)$ et $g(\sqrt{2})$.

c. Construire la courbe C_g de g dans le même repère.

3. Montrer que g est dérivable sur J et que pour tout x de J, $g'(x)=\frac{2x}{x^4-2x^2+2}$.

4. Soit la suite (u_n) définie par

$$u_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} g(k),\ n\in\mathbb{N}.$$

a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g(n)\le u_n\le g(2n)$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

B/ Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$

$$\text{par } h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}g\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) & \text{si } x>0,\\ \frac{\pi}{4} & \text{si } x=0.\end{cases}$$

1. a. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. Monter que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $h'(x)=\frac{-1}{2(x^2+1)}$.

2. a. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe un réel $c\in]0,x[$ tel que $h(x)-\frac{\pi}{4}=\frac{-x}{2(c^2+1)}$.

b. En déduire que h est dérivable à droite en 0 et que $h'_d(0)=-\frac{1}{2}$.

c. Dresser le tableau de variation de h.

3. a. Montrer que l'équation $h(x)=x$ admet dans $\mathbb{R}_+$ une solution unique α et que $\alpha\in]0,1[$.

b. Montrer que pour tout réel $x\in\mathbb{R}_+$, $|h'(x)|\le\frac{1}{2}$.

4. Soit la suite (v_n) définie par

$$\begin{cases}v_0\in\mathbb{R}_+\setminus\{\alpha\},\\ \text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=h(v_n).\end{cases}$$

a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|v_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|v_n-\alpha|$.

b. En déduire que la suite (v_n) est convergente et donner sa limite.

FONCTIONS RECI PROQUES

QCM :

1) $I=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

2) $(f^{-1})'(\frac{1}{2})=\frac{1}{f'(\frac{\pi}{3})}=-\frac{2}{\sqrt{3}}$

3) f réalise une bijection de $[1,4]$ sur $[1,4]$

4) f est dérivable sur $]0,+\infty[$

VRAI-FAUX :

1) (faux)

Contre exemple : $f(x)=3-\frac{4x}{x^2+3}$

* f(1)=2
* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$
* f est dérivable sur $[1,+\infty[$
* $f'(x)=\frac{4(x^2-3)}{(x^2+1)^2}$

x	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
f '(x)	-	0	+
f(x)	2 ↘	$3-\frac{2}{\sqrt{3}}$	↗ 3

$f([1,+\infty[)=\left[3-\frac{2}{\sqrt{3}},3\right[$

2) (vrai)

* f(x)=ax+b ; $a\neq 0$

f '(x)=a

• si a>0 ; f continue et strictement croissante

f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

• si a<0 ; f est continue et strictement décroissante

f : bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

3) (faux)

$\sqrt[3]{16}>2$ car $16>2^3$

$\sqrt[4]{16}=2$

$\sqrt[4]{16}<\sqrt[3]{16}$

4) (vrai) pour $n\geq 2$

$f(x)=\sqrt[n]{x} \rightarrow f^{-1}(x)=x^n$

$(f^{-1})'(0)=0$

5) (faux)

contre exemple :

$f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$ $I=\mathbb{R}$

$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=0$

$f(I)=]0,+\infty[$

f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})=]0,+\infty[$

$y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(y)=x\Leftrightarrow y+\sqrt{1+y^2}=x$

$\Leftrightarrow\sqrt{1+y^2}=x-y\Leftrightarrow 1+y^2=x^2+y^2-2xy$

$\Leftrightarrow y=\frac{x^2-1}{2x}$

$f^{-1}(x)=\frac{x^2-1}{2x}$

f^{-1} ne garde pas un signe constant sur $]0,+\infty[$

FONCTIONS RECI PROQUES

CH4 TOME I

EX 1 :

1) f(x)=1-4x I=$]-\infty,1]$ $f'(x)=-4<0$

f est continue et strictement décroissante sur I

elle réalise donc une bijection de I sur J=f(I)

$J=\left[f(1),\lim_{x\to-\infty} f(x)\right[=[-3,+\infty[$

soit $y=f^{-1}(x)$ $x\in J$, $y\in I$

$\Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow 1-4y=x \Leftrightarrow y=\dfrac{1-x}{4}$

$d'où \quad f^{-1}(x)=\dfrac{1}{4}(1-x)$

2) $f(x)=x^2-4x+1$ $I=[2,+\infty[$

$f'(x)=2x-4=2(x-2)\geq 0\ \forall\ x\in I$

f est continue et strictement croissante sur I=$[2,+\infty[$

elle réalise donc une bijection de I sur J=f(I)

$J=\left[f(2),\lim_{+\infty} f\right[=[-3,+\infty[$

soit $y=f^{-1}(x)$ $x\in J$, $y\in I$

$\Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow y^2-4y+1=x \Leftrightarrow y^2-4y+(1-x)=0$

$\Delta'=4-(1-x)=3+x\geq 0$

$y_1=2-\sqrt{3+x}$ et $y_2=2+\sqrt{3+x}$

or $y\in[2,+\infty[\rightarrow y\geq 2$

d'où $f^{-1}(x)=2+\sqrt{3+x}$

3) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ $I=]-1,+\infty[$

$f'(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0$

f est continue et strictement croissante sur I=$]-1,+\infty[$

d'où f est une bijection de I sur J=f(I)

$J=\left]\lim_{(-1)^+} f,\lim_{+\infty} f\right[=]-\infty,2[$

soit $y=f^{-1}(x)$ $x\in J$, $y\in I$

$\Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow \dfrac{2y-1}{y+1}=x \Leftrightarrow 2y-1=xy+x \Leftrightarrow y=\dfrac{1+x}{2-x}$

$f^{-1}(x)=\dfrac{1+x}{2-x}$

4) $f(x)=\sqrt{x-3}+x$ I=$[3,+\infty[$

f est dérivable sur $]3,+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}+1>0$

f est continue et strictement croissante sur I=$[3,+$

elle réalise donc une bijection de I sur J=f(I)

J=$\left[f(3),\lim_{+\infty} f\right[=[3,+\infty[$

soit $y=f^{-1}(x)$ $x\in J$, $y\in I$

$\Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow \sqrt{y-3}+y=x$

$\Leftrightarrow \sqrt{y-3}=x-y \Leftrightarrow y-3=x^2-2xy+y^2$

$\Leftrightarrow y^2-(2x+1)y+(x^2+3)=0$

$\Delta=(2x+1)^2-4(x^2+3)$

$\Delta=4x-11\geq 0$

$y'=\dfrac{2x+1-\sqrt{4x-11}}{2}$

$y''=\dfrac{2x+1+\sqrt{4x-11}}{2}$

$f(3)=3 \Rightarrow f^{-1}(3)=3$

pour $x=3 \xrightarrow[\text{à rejeter}]{} y''=4$

d'où $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+1-\sqrt{4x-11}}{2}$

EX 2 :

$g(x)=ax+b$; $a\neq 0$

1) *1er cas: a>0 g'(x)=a>0

g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

d'où g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$f(\mathbb{R})=\left]\lim_{-\infty} f,\lim_{+\infty} f\right[=\mathbb{R}$

* 2éme cas: a<0 g'(x)=a<0

g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

d'où g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$g(\mathbb{R})=\left]\lim_{+\infty} g,\lim_{-\infty} g\right[=\mathbb{R}$

2) $y=g^{-1}(x) \Leftrightarrow g(y)=x \Leftrightarrow ay+b=x$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{b}{a}$ $Donc\ \ g^{-1}(x)=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{b}{a}$

$g^{-1}(x) = g(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = a \\ \frac{-b}{a} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ ab = -b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} ou \begin{cases} a = -1 \\ b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

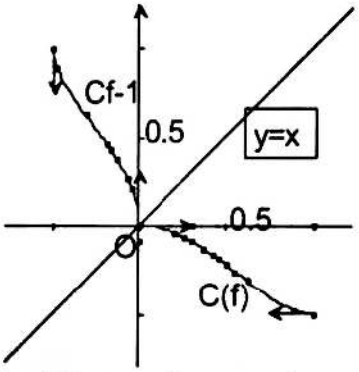
EX 3 :

$f(x)=\frac{1}{2}x^4 - x^2$; $x \in [0,1]$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x)=2x^3-2x=2x(x^2-1)$

x	0		1
f '(x)	0	-	0
f(x)	0	↘	$\frac{-1}{2}$



2) a) f est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$

elle réalise donc une bijection de $[0,1]$ sur J

$J=f([0,1])=[f(1),f(0)]=\left[\frac{-1}{2},0\right]$

b) $(\zeta_{f^{-1}}) = S_{\Delta}(\zeta_f)$ avec Δ:y=x

c) on pose : $y=f^{-1}(x)$ $x \in \left[\frac{-1}{2},0\right]$, $y \in [0,1]$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}y^4 - y^2 = x \Leftrightarrow y^4 - 2y^2 = 2x$

$\Leftrightarrow y^4 - 2y^2 + 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow (y^2-1)^2 = 2x+1$

$\Leftrightarrow |y^2 - 1| = \sqrt{2x+1}$

$\Leftrightarrow 1 - y^2 = \sqrt{2x+1}$ car $y \in [0,1]$

$\Leftrightarrow y^2 = 1 - \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow y = \sqrt{1-\sqrt{2x+1}}$ car $y \geq 0$

d'où $f^{-1}(x) = \sqrt{1-\sqrt{2x+1}}$

EX 4 :

$f(x) = \cos(\pi x)$: $x \in [0,1]$

1) $f'(x)=-\pi.\sin(\pi x)$

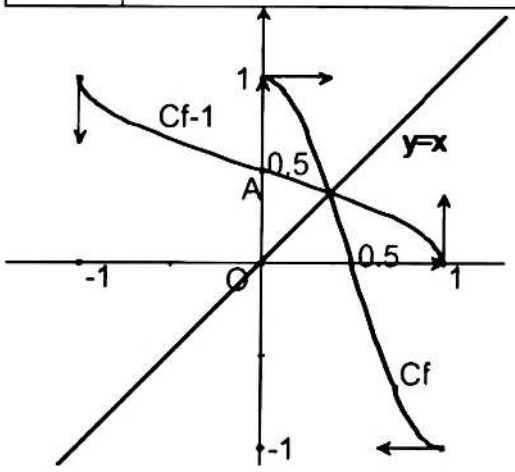
$x \in [0,1] \rightarrow \pi x \in [0,\pi]$

$\Rightarrow f'(x) \leq 0$

f est continue et strictement décroissante sur [0,1]
d'où f réalise une bijection de [0,1] sur
J=[f(1),f(0)]=[-1,1]

2)

x	0		1
f '(x)	0	-	0
f(x)	1	↘	-1



3) on pose : $\varphi(x)=f^{-1}(x)+f^{-1}(-x)$

- f est continue sur $[0,1]$

d'où f^{-1} est continue sur $[-1,1]$

par suite φ est continue sur $[-1,1]$

- f est dérivable sur $]0,1[$

et $f'(x)=-\pi\sin(\pi x)\neq 0$; $\forall x\in]0,1[$

d'où f^{-1} est dérivable sur $f(]0,1[)=]-1,1[$

φ est dérivable sur $]-1,1[$

calculons $(f^{-1})'(x)$ pour $x\in]-1,1[$

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{f'(y)} \quad \text{avec } y=f^{-1}(x), f(y)=x$$

$$=\frac{-1}{\pi\sin(\pi y)}=\frac{-1}{\pi\sqrt{1-\cos^2(\pi y)}} \quad \text{car } \sin \pi y \geq 0$$

$$=\frac{-1}{\pi\sqrt{1-f^2(y)}}$$

$$(f^{-1})'(x)=\frac{-1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

$$\varphi'(x)=(f^{-1})'(x)-(f^{-1})'(-x)$$

$$=\frac{-1}{\pi\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\pi\sqrt{1-(-x)^2}}=0$$

$\varphi(x)=f^{-1}(x)+f^{-1}(-x)$

$\varphi'(x)=0$; $\forall x\in]-1,1[$

d'où φ est constante sur $[-1,1]$

$f(0)=1 \rightarrow f^{-1}(1)=0$

$f(1)=-1 \rightarrow f^{-1}(-1)=1$

$\varphi(1)=f^{-1}(1)+f^{-1}(-1)$

$\varphi(1)=1$

d'où $\varphi(x)=1$; $\forall x\in[-1,1]$

$\Rightarrow f^{-1}(x)+f^{-1}(-x)=1 \quad \forall x\in[-1,1]$

<u>interprétation graphique :</u>

$f^{-1}(x)+f^{-1}(-x)=1$

$\Rightarrow f^{-1}(-x)=1-f^{-1}(x)$

$\Rightarrow f^{-1}(2\times 0-x)=2\times\frac{1}{2}-f^{-1}(x)$

A(0,½) est un centre de symétrie pour $(\zeta_{f^{-1}})$

EX 5 :

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{4+x}$; $D_f=\mathbb{R}_+$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{(4+x)-4}{x\left[\sqrt{4+x}+2\right]}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}=+\infty$$

f n'est pas dérivable à droite en 0

2) a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{4+x}}>0$$

f est continue et strictement croissante sur $[0,$

elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $J=f([0,$

$J=[2,+\infty[$

* f est dérivable sur $]0,+\infty[$

et $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{4+x}}\neq 0$

d'où f^{-1} est dérivable sur $f(]0,+\infty[)=]2,+\infty[$

* $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f^{-1}(x)}{x-2}$

(on pose $y=f^{-1}(x), x=f(y)$; $x\to 2^+, y\to 0^+$)

$$=\lim_{y\to 0^+}\frac{y}{f(y)-2}=\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{\frac{f(y)-f(0)}{y}}=0$$

d'où f^{-1} est dérivable à droite en 2 et $(f^{-1})'_d(2)=$

(Rq: on pourra résoudre le probléme graphiquem

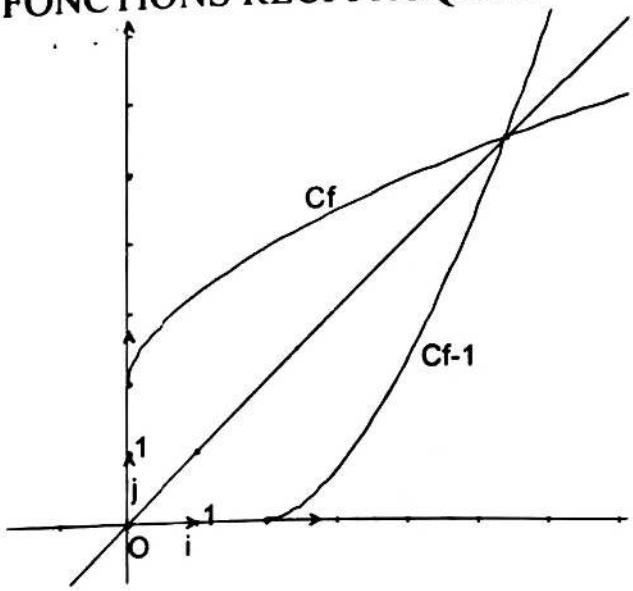
conclusion : f^{-1} est dérivable sur $J=[2,+\infty[$

b) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{4+x}}>0$

x	0		$+\infty$
f'(x)	|	+	
f(x)		↗	$+\infty$
	2		

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{4+x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x}}=0$

(ζ_f) admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$



EX 6 :

) * f(0)=-1 ⇒ g(-1)=0

(ζ_f) admet une tangente horizontal au point d'abscisse 0 d'où (ζ_g) admet une tangente verticale au point d'abscisse f(0)=-1

par suite g n'est pa dérivable en (-1)

* f(-2)=1 ⇒ g(1)=-2

(ζ_f) admet une tangente verticale au point d'abscisse (-2) d'où (ζ_g) admet une tangente horizontale au point d'abscisse f(-2)=1 par suite : g est dérivable en 1 et g'(1)=0

2) * f est décroissante sur $\mathbb{R}$ d'où g est décroissante sur f($\mathbb{R}$)= $\mathbb{R}$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

x	-∞	-1	+∞
f '(x)	-	‖	-
f(x)	+∞		-∞

3) $(\zeta_g)=S_\Delta(\zeta_f)$ avec Δ : y=x

EX 7 :

1) * f(1)= -1 ⇒ g(-1)=1

f est dérivable en 1 et f '(1)= -1 ≠0 d'où g est dérivable en (-1) et $g'(-1)=\dfrac{1}{f'(1)}=-1$

* f(2)= -4 ⇒ g(-4)=2

f n'est pas dérivable à gauche en 2

(ζ_f) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 2 d'où (ζ_g) admet une demi tangente horizontal au point d'abscisse (-4)

g est dérivable à droite en (-4) et $g'_d(-4)=0$

2)

x	-4	+∞
g(x)	2	-1

3) $(\zeta_g)=S_\Delta(\zeta_f)$ avec Δ : y=x

EX 8 :

A/ $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$

$g(x)=\sin(2x)-x$

1) g est dérivable sur $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$

$g'(x)=2\cos(2x)-1=0 \Leftrightarrow \cos 2x=\dfrac{1}{2}$

or $(2x)\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 2x=\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6}$

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
g'(x)	+	0	-
g(x)	$\frac{\pi}{4}-1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$	$1-\frac{\pi}{4}$

2) sin(2x)=x ⇔ g(x)=0

* g est continue et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right]$ d'où

$g\left(\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right]\right)=\left[g(\dfrac{\pi}{4}),g(\dfrac{\pi}{6})\right]=\left[1-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right]$

FONCTIONS RECI PROQUES

$0 \notin \left[1-\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right]$

d'où l'équation : g(x)=0 n'a pas de solutions dans $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$

* g est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$ d'où g réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$ sur $\left[\frac{\pi}{4}-1, \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right]$

comme $0 \in \left[\frac{\pi}{4}-1, \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right]$ alors il existe un unique réel $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$ tel que : $g(\alpha)=0$

conclusion : l'équation : g(x)=0 admet α comme unique solution dans $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

$g(-\frac{\pi}{4}) \neq 0$ et $g(\frac{\pi}{4}) \neq 0 \Rightarrow \alpha \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$

B/ $f(x)=\sin(2x)$; $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

1) a) f'(x)=2 cos (2x)

f'(0)=2 ; f(0)=0 T :y=2x

b) f ''(x)= -4 sin(2x)

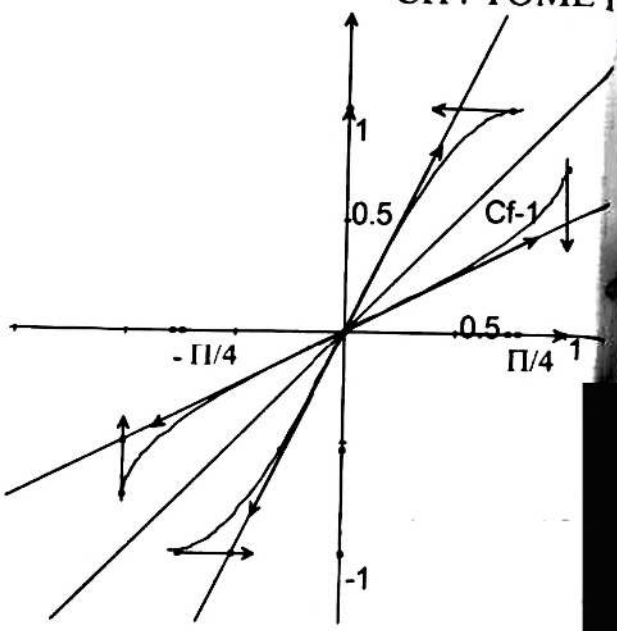
x	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$
f ''(x)	+	0	-

f '' s'annule en 0 en changeant de signe d'où le point de coordonnées (0,f(0)) est un point d'inflexion pour (ζ_f)

f(0)=0 d'où l'origine du repère est un point d'inflexion pour (ζ_f)

2) f '(x)=2cos(2x)

x	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$
f '(x)	0	+	0
f(x)	-1	↗	1



3) a) f est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ elle réalise donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ sur

$f\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right)=\left[f(-\frac{\pi}{4}), f(\frac{\pi}{4})\right]=[-1,1]$

b) $(\zeta_{f^{-1}})=S_{\Delta}(\zeta_f)$ avec Δ : y=x

4) f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ et f '(x)=2cos(2x)≠0 d'où f^{-1} est dérivable sur f$\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\right)$=]-1,1[

$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)}$ (avec $y=f^{-1}(x)$, f(y)=x)

$=\frac{1}{2\cos(2y)}=\frac{1}{2\sqrt{1-\sin^2(2y)}}=\frac{1}{2\sqrt{1-f^2(y)}}$

$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

EX 9 :

$f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1-x^2}}$; $x\in[0,1[$

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x}{1-x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x}{1-x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)}=+\infty$

f n'est pas dérivable a droite en 0

(ζ_f) admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse 0

b) f est dérivable sur]0,1[

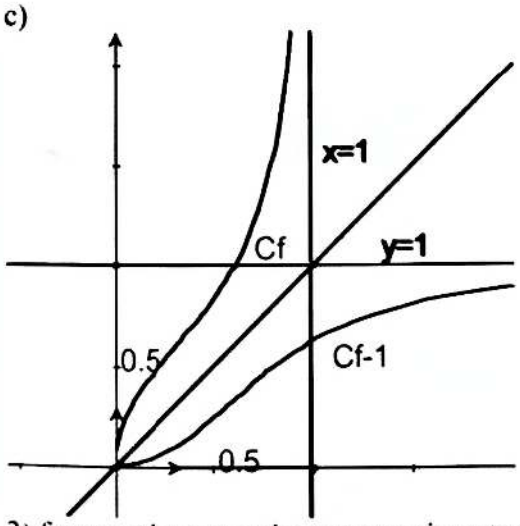
$$f'(x)=\frac{\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'}{2\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}}=\frac{\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}}$$

$$=\frac{1+x^2}{2\sqrt{x}(1-x^2).\sqrt{1-x^2}}>0$$

x	0		1
f '(x)	|	+	
f(x)	0	↗	+∞

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{x}{1-x^2}}=+\infty$

c)



2) f est continue et strictement croissante sur [0,1[elle réalise donc une bijection de [0,1[sur I=[0,+∞[

3) a) (ζ_f) admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse 0 d'où la courbe de f^{-1} admet une demi-tgte horizontal à droite au point d'abscisse 0

$\Rightarrow$ f^{-1} est dérivable à droite en 0

et $(f^{-1})'_d(0)=0$

b) * $(f^{-1})'_d(0)=0$

* f est dérivable sur]0,1[

et $f'(x)=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{x}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\neq 0\ \ \forall x\in]0,1[$

d'où f^{-1} est dérivable sur f(]0,1[)=]0,+∞[

* on pose y= $f^{-1}(x)$ $x\in]0,+\infty[$, $y\in]0,1[$

$$f(y)=x\Leftrightarrow\sqrt{\frac{y}{1-y^2}}=x\Leftrightarrow\frac{y}{1-y^2}=x^2$$

$$\Leftrightarrow y=x^2-x^2y^2\Leftrightarrow x^2y^2+y-x^2=0$$

$\Delta=1+4x^4>0y$

$$y'=\frac{-1-\sqrt{1+4x^4}}{2x^2}<0$$

$$y''=\frac{-1+\sqrt{1+4x^4}}{2x^2}$$

d'où $f^{-1}(x)=\dfrac{-1+\sqrt{1+4x^4}}{2x^2}$ pour $x\in]0,+\infty[$

$(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{x^3}\left[1-\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^4}}\right]$ pour $x\in]0,+\infty[$

c) $(\zeta_{f^{-1}})=S_\Delta(\zeta_f)$ avec Δ :y=x(voir figure)

EX 10 :

$f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; $x\in[-1,1[$

1) a)

x	-∞	-1		1	+∞
1+x	-	0	+	|	+
1-x	+	|	+	0	-
$\frac{1+x}{1-x}$	-	0	+	|	-

la fonction : $x\mapsto\dfrac{1+x}{1-x}$ est dérivable et strictement positive sur]-1,1[d'où f est dérivable sur]-1,1[

et $f'(x)=\dfrac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}=\dfrac{\frac{2}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}=\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$

b)

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1}{x+1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$$

(ζ_f) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse (-1)

c) $\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=+\infty$

la droite d'équation : x=1 est une asymptote à (ζ_f)

d) $f'(x)=\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}>0 \quad \forall x\in]-1,1[$

x	-1		1
f '(x)	|	+	|
f(x)	0	↗	+∞

2) a) A(0,1)

(T) : y=f'(0).(x-0)+f(0)

(T) : y=x+1

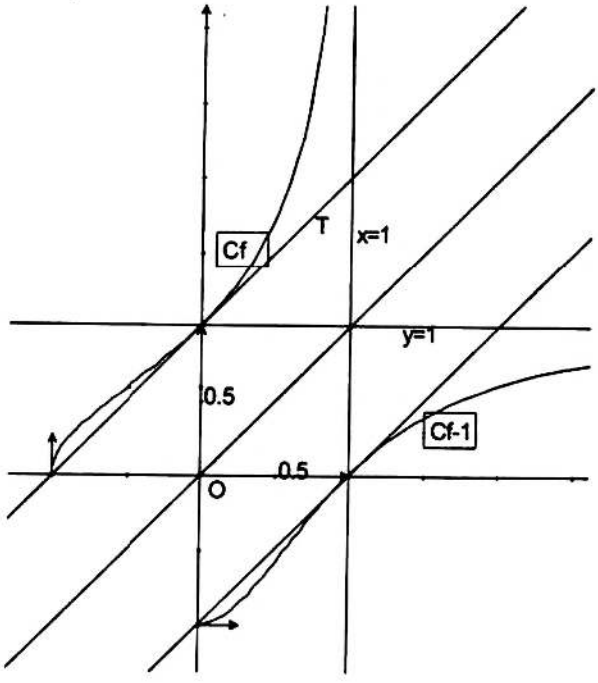
b)

$$f(x)-(x+1)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-(1+x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.\left[1-\sqrt{1-x^2}\right]$$

$1-x^2\le1\Rightarrow\sqrt{1-x^2}\le1$

$\Rightarrow f(x)-(x+1)\ge0$

(ζ_f) est au dessus de (T)



3) a) f est continue et strictement croissante sur [-1,1[elle réalise donc une bijection de [-1,1[sur J=f([-1,1[) $J=\left[f(-1),\lim_{-1}f(x)\right[=[0,+\infty[$

b) $(\zeta_{f^{-1}})=S_\Delta(\zeta_f)$ Δ : y=x (figure)

EX 11 :

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{1}{(x^2+2x+2).\sqrt{x^2+2x+2}}>0$$

- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2+2x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}}$

- $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{|x|.\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}=-1$$

x	-∞		+∞
f '(x)	+		
f(x)	-1	↗	1

2) a) * pour $x \in D_f = \mathbb{R}$, $(-2-x) \in D_f$

* $f(-2-x) = \dfrac{(-2-x)+1}{\sqrt{(-2-x)^2 + 2(-2-x)+2}}$

$= \dfrac{-(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}} = -f(x)$

d'où I(-1,0) est un centre de symétrie pour (ζ_f)

b) $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$

$f''(x) = \dfrac{-3(x+1)}{(x^2+2x+2)^2.\sqrt{x^2+2x+2}}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''(x)	+	0	-

f'' s'annule en changeant de signe en -1 d'où I(-1,f(-1)) est un point d'inflexion : I(-1,0)

3) a) $f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-x=0$

on pose $h(x)=f(x)-x$

$h'(x) = \dfrac{1}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}} - 1$

$x^2+2x+2 = 1+(1+x)^2 > 1$

$\Rightarrow h'(x) < 0$, h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

h est continue sur $[0,1]$

$h(0) \times h(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times (\dfrac{2}{\sqrt{5}} - 1) < 0$

d'où l'équation h(x)=0 admet une solution $\alpha \in]0,1[$

comme h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, alors

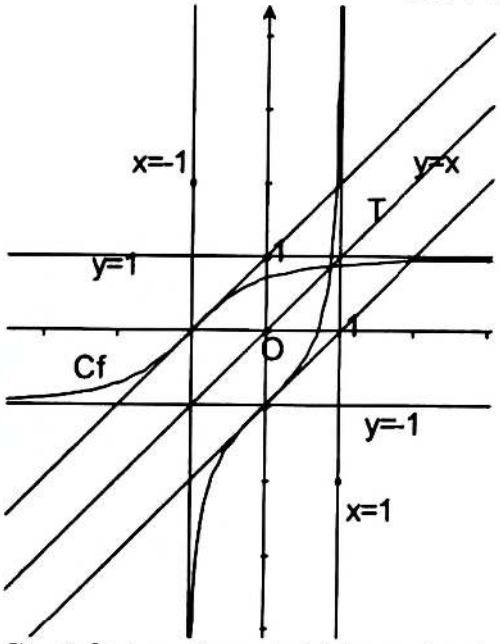
α est unique $(\zeta_f) \cap \Delta = \{A(\alpha,\alpha)\}$

b)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
h(x)	+	0	-
Position relative	$(\zeta_f)/\Delta$	A(α,α)	$\Delta/(\zeta_f)$

4) T : $y = f'(-1)(x+1)+f(-1)$

T : $y = x+1$



5) a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$J = f(\mathbb{R}) =]-1,1[$

b) $(\zeta_{f^{-1}}) = S_\Delta(\zeta_f)$ $\quad \Delta : y=x$

EX 12 :

$g(x) = tg(\pi x)$; $x \in \left]\dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$

1) g est dérivable sur $\left]\dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$

$g'(x) = \pi.(1+tg^2(\pi x)) > 0$

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
g'(x)	+	
g(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to (\frac{1}{2})^-} (\pi x) = (\frac{\pi}{2})^- \\ \lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} tgx = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{(\frac{1}{2})^-} g = +\infty$

2) g est continue et strictement croissante sur $]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}[$

elle réalise donc une bijection de $]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}[$ sur

$g(I) = \left]\lim\limits_{(-\frac{1}{2})^+} g, \lim\limits_{(\frac{1}{2})^-} g\right[= \mathbb{R}$

3) g est dérivable sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$

et $g'(x)=\pi.(1+tg^2(\pi x))\neq 0$ d'où g^{-1} est

dérivable sur $g(]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[)=\mathbb{R}$

en particulier g est dérivable sur $]-\infty,0[$

4) $x\in]-\infty,0[$

$G(x)=g^{-1}(x)+g^{-1}(\frac{1}{x})$

a) g^{-1} est dérivable sur $]-\infty,0[$

la fonction $U : x\mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty,0[$

et $U(]-\infty,0[)=]-\infty,0[$

g^{-1} est dérivable sur $]-\infty,0[$

d'où la fonction : $x\mapsto g^{-1}(\frac{1}{x})$ est dérivable sur $]-\infty,0[$

par suite G est dérivable sur $]-\infty,0[$

$G'(x)=(g^{-1})'(x)+(\frac{1}{x})'.(g^{-1})'(\frac{1}{x})$

$G'(x)=(g^{-1})'(x)-\frac{1}{x^2}.(g^{-1})'(\frac{1}{x})$

calculons $(g^{-1})'(x)$ pour $x\in]-\infty,0[$

on pose $y=g^{-1}(x)$ $\quad x\in]-\infty,0[$, $y\in\left]-\frac{1}{2},0\right[$

$g(y)=x \rightarrow tg(\pi y)=x$

$(g^{-1})'(x)=\frac{1}{g'(y)}=\frac{1}{\pi.(1+tg^2(\pi y))}=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$

d'où $G'(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}-\frac{1}{x^2}.\frac{1}{\pi(1+\frac{1}{x^2})}=0 \quad \forall x\in]-\infty,0[$

b) $G'(x)=0$; $\forall x\in]-\infty,0[$

d'où G est une fonction constante sur $]-\infty,0[$.

$G(-1)=g^{-1}(-1)+g^{-1}(-1)=2g^{-1}(-1)=\frac{-1}{2}$

car $g(\frac{-1}{4})=-1$, $g^{-1}(-1)=\frac{-1}{4}$

$\Rightarrow g^{-1}(x)+g^{-1}(\frac{1}{x})=\frac{-1}{2}$

$\Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{-1}{2}-g^{-1}(\frac{1}{x})$; $\forall x\in]-\infty,0[$

EX 13 :

$h(x)=\cot g(\frac{x}{2})$; $x\in]0,\pi]$

1) $h'(x)=-\frac{1}{2}(1+cotg^2\frac{x}{2})<0$

h est continue et strictement décroissante sur $]0$

elle réalise donc une bijection de $]0,\pi]$

sur $h(]0,\pi])=\left[h(\pi),\lim_{0^+}h\right[=[0,+\infty[=\mathbb{R}_+$

2) $\varphi=h^{-1}$

f est dérivable sur $]0,\pi]$

et $h'(x)=\frac{-1}{2}(1+\cot g^2(\frac{x}{2}))\neq 0$

d'où φ est dérivable sur $h(]0,\pi])=\mathbb{R}_+$

$\varphi'(x)=\frac{1}{h'(\varphi(x))}$ $\quad (y=\varphi(x)\ ;\ h(y)=x)$

$=\frac{1}{-\frac{1}{2}(1+\cot g^2(\frac{y}{2}))}=\frac{-2}{1+(h(y))^2}$

$\varphi'(x)=\frac{-2}{1+x^2}$

b) $\psi'(x)=\varphi(\frac{1}{x})$; $x\in]0,+\infty[$

$\psi'(x)=-\frac{1}{x^2}.\varphi'(\frac{1}{x})=-\frac{1}{x^2}(\frac{-2}{1+\frac{1}{x^2}})$

$\psi'(x)=\frac{2}{1+x^2}$

c) $h(\frac{\pi}{2})=1 \Rightarrow \varphi(1)=\frac{\pi}{2}$

on pose : $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$

f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$f'(x)=\varphi'(x)+\psi'(x)=0$

f est constante sur $]0,+\infty[$

$f(1)=\varphi(1)+\psi(1)=\pi$

d'où $f(x)=\pi$; $\forall x\in]0,+\infty[$

$\Rightarrow \varphi(x)+\psi(x)=\pi$ pour $x>0$

EX 14 :

$f(x) = x.\sqrt{1-x^2}$; $x \in [0,1[$

1) f est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $[0,1]$

$f'(x) = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in]0,1[$

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
g'(x)	+	0	-
g(x)	0 ↗	$\frac{1}{2}$	↘ 0

2) $g(x) = f(x)$; $x \in \left[0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

a) g est continue et strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ elle réalise donc une bijection de $\left[0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ sur $I=g\left(\left[0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]\right)=\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$

b) • g^{-1} est continue et strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$

• g^{-1} est dérivable sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right[$

on pose $y=g^{-1}(x)$ avec $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $y \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$\Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow y\sqrt{1-y^2} = x \Leftrightarrow y^2(1-y^2) = x^2$

$\Leftrightarrow y^4 - y^2 + x^2 = 0 \Leftrightarrow (y^2 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} - x^2$

$\Leftrightarrow \left|y^2 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - y^2 = \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$ car $y^2 \le \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x^2})$

$y = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4x^2})}$ car $y \ge 0$

$g^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2}}$

3) $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) * pour n=0 , on a $0 \le U_0 = \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}$ (vrai)

* supposons que : $0 \le U_n \le \frac{1}{2}$

et montrons que : $0 \le U_{n+1} \le \frac{1}{2}$

$0 \le U_n \le \frac{1}{2}$

f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ $\Rightarrow$

$f(0) \le f(U_n) \le f(\frac{1}{2})$

$\Rightarrow 0 \le U_{n+1} \le \dfrac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 0 \le U_{n+1} \le \frac{1}{2}$

conclusion : $0 \le U_n \le \frac{1}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

3) b) $U_{n+1} - U_n = U_n\sqrt{1-U_n^2} - U_n = U_n.\left[\sqrt{1-U_n^2} - 1\right]$

$= U_n.\dfrac{-U_n^2}{\sqrt{1-U_n^2}+1} = \dfrac{-U_n^3}{\sqrt{1-U_n^2}+1} \le 0$ car $U_n \ge 0$

d'où (U_n) est décroissante

c) * (U_n) est décroissante et minorée par 0 elle est donc convergente

* soit ℓ sa limite

$0 \le U_n \le \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le \ell \le \frac{1}{2}$

$U_{n+1} = f(U_n)$

f est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ d'où $\ell = f(\ell)$

$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell\sqrt{1-\ell^2} = \ell \Leftrightarrow \ell^2.(1-\ell^2) = \ell^2 \Leftrightarrow -\ell^4 = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

EX 15 : n≥2

$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x - 1$

1) $f_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + ... + 2x + 1$

$f_n'(x) > 0$; $\forall x \in [0,1]$

f_n est continue et strictement croissante sur $[0,1]$

elle réalise donc une bijection de $[0,1]$ sur $f_n([0,1])$

$f_n([0,1]) = [f_n(0), f_n(1)] = [-1, n-1]$

2) a) f_n est une bijection de $[0,1]$ sur $[-1,n-1]$

comme $0 \in [-1,n-1]$, alors il existe un unique

réel $\alpha_n \in [0,1]$ tel que: $f_n(\alpha_n)=0$

$f_n(0) \times f_n(1) = 1-n < 0 \Rightarrow 0 < \alpha_n < 1$

b) pour $x \neq 1$

$x^n + x^{n-1} + ... + x = x.(\frac{1-x^n}{1-x})$ comme étant somme de

n termes consécutifsd'une suite géometrique de raison x

$f_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_n(\frac{1-\alpha_n^{\,n}}{1-\alpha_n}) - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_n(1-\alpha_n^{\,n}) = 1-\alpha_n$

$\Leftrightarrow \alpha_n - \alpha_n^{\,n+1} = 1-\alpha_n \Leftrightarrow \alpha_n^{\,n+1} = 2\alpha_n - 1$

3) a) on a : $f_{n+1}(x) = f_n(x) + x^{n+1}$

$f_n(\alpha_n) = 0$

$f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 = f_n(\alpha_n)$

$\Rightarrow f_{n+1}(\alpha_{n+1}) + \alpha_{n+1}^{n+1} = f_n(\alpha_n)$

$\Rightarrow f_{n+1}(\alpha_{n+1}) \leq f_n(\alpha_n)$ car $\alpha_{n+1} \geq 0$

$\Rightarrow \alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ car f_n *est* strictement croissante

par suite (α_n) est décroissante

b) * (α_n) est décroissante et minorée par 0

elle est donc convergente

* $\alpha_n \geq 0$

$\Rightarrow (\alpha_n)^{n+1} \geq 0$

$\Rightarrow 2\alpha_n - 1 \geq 0$ (1)

déterminons α_2 ?

$f_2(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x-1=0$ avec $x \in [0,1]$

$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\alpha_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(α_n) est décroissante d'où pour $n \geq 2 \Rightarrow \alpha_n \leq \alpha_2$

$\Rightarrow \alpha_n \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow (\alpha_n)^{n+1} \leq (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{n+1}$

$\Rightarrow 2\alpha_n - 1 \leq (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{n+1}$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow 0 \leq 2\alpha_n - 1 \leq (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{n+1} = 0$ car $-1 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$

d'où $\lim_{n\to+\infty} (2\alpha_n - 1) = 0$

$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$

EX 16 :

A/

$f(x) = -x + \sqrt{x^2+8}$

1) a)

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+8} - x) = +\infty$

* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+8} - x)$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{\sqrt{x^2+8}+x} = 0$

* $\lim_{x\to-\infty} (f(x)+2x) = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+8}+x)$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{8}{\sqrt{x^2+8}-x} = 0$

b) * $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

(ζ_f) admet la droite d'équation : y=0

comme asymptote au voisinage de $(+\infty)$

* $\lim_{x\to-\infty} (f(x)+2x) = 0$

$\Delta : y = -2x$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x)=-1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+8}}=\dfrac{x-\sqrt{x^2+8}}{\sqrt{x^2+8}}$

$x^2+8>x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+8}>|x| \Rightarrow \sqrt{x^2+8}>x$

$\Rightarrow x-\sqrt{x^2+8}<0$ d'où $f'(x)<0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
f '(x)	-	
f(x)	$+\infty$ ↘	0

3) f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J=f(\mathbb{R})=]0,+\infty[$

4) a) $f(x)=x \Leftrightarrow -x+\sqrt{x^2+8}=x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+8}=2x$

* l'équation f(x)=x n'a pas de solutions dans $]-\infty,0[$

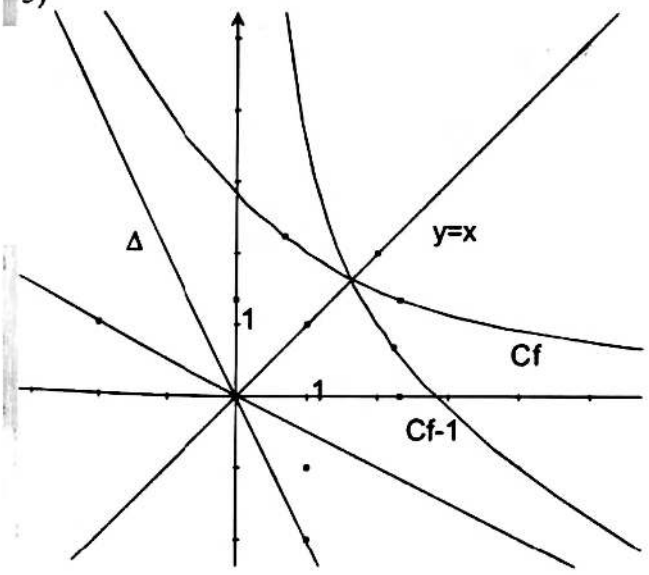
* dans $[0,+\infty[$

$f(x)=x \Leftrightarrow x^2+8=4x^2 \Leftrightarrow x^2=8/3 \Leftrightarrow x=\sqrt{8/3}=\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\dfrac{2}{3}\sqrt{6}\right\}$

b) $(\zeta_f)\cap(\zeta_{f^{-1}})=\left\{A\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)\right\}$

5)



B/

1) f est continue et strictement décroissante sur $[1,2]$ d'où $f([1,2])=[f(1),f(2)]=[2\sqrt{3}-2,2]$

$f([1,2])\subset[1,2]$ car $2\sqrt{3}-2>1$

2) $f'(x)=-1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}$

$|f'(x)|=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}$

$1\le x\le 2 \Rightarrow 1\le x^2\le 4$

$\Rightarrow 9\le x^2+8\le 12 \Rightarrow 3\le\sqrt{x^2+8}\le 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\le\dfrac{1}{\sqrt{x^2+8}}\le\dfrac{1}{3}$

d'où $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\le\dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}\le\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}\ge\dfrac{1}{3}\Rightarrow-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}\ge-\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow 1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}\le\dfrac{2}{3}$

d'où pour $x\in[1,2]$ $|f'(x)|\le\dfrac{2}{3}$

3) $\begin{cases}U_0=1\\U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$

a) * pour n=0 $1\le U_0\le 2$ (vrai)

* supposons que $1\le U_n\le 2$

* montrons que $1\le U_{n+1}\le 2$

$1\le U_n\le 2\Rightarrow U_n\in[1,2]\Rightarrow f(U_n)\in f([1,2])$

$\Rightarrow U_{n+1}\in[1,2]$ car $f([1,2])\subset[1,2]$

conclusion : $1\le U_n\le 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

b) d'après 4) a)

$f(\sqrt{8/3})=\sqrt{8/3}$

f est dérivable sur [1,2] et $|f'(x)|\le 2/3$

U_n et $\sqrt{8/3} \in [1,2]$

d'après le théoréme des inégalités des accroissements finis :

$$|f(U_n) - f(\sqrt{8/3})| \le \frac{2}{3}|U_n - \sqrt{8/3}|$$

$$\Rightarrow |U_{n+1} - \sqrt{8/3}| \le \frac{2}{3}|U_n - \sqrt{8/3}|$$

c) $|U_1 - \sqrt{8/3}| \le \frac{2}{3}|U_0 - \sqrt{8/3}|$

$|U_2 - \sqrt{8/3}| \le \frac{2}{3}|U_1 - \sqrt{8/3}|$

$|U_n - \sqrt{8/3}| \le \frac{2}{3}|U_{n-1} - \sqrt{8/3}|$

multiplions membre à membre et simplifions :

$$|U_n - \sqrt{8/3}| \le (\frac{2}{3})^n . |1 - \sqrt{8/3}|$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{2}{3})^n . |1 - \sqrt{8/3}| = 0$$

d'où $\lim_{x\to+\infty}(U_n - \sqrt{8/3}) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} U_n = \sqrt{8/3}$$

EX 17 :

1) * $x = \frac{\sqrt[3]{3}\sqrt{27}\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{81}} = \frac{\sqrt[3]{3}\times 3\sqrt{3}\times\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{3^4}}$

$= \frac{\sqrt[3]{3}\times 3\sqrt{3}\times 2}{3\sqrt[3]{3}} = 2\sqrt{3}$

* $y = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{32}} = \sqrt[3]{\frac{4}{32}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$

* $t = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

2) $A = \frac{\sqrt[3]{2^{10}}\times\sqrt{\sqrt{8^2}}\times\sqrt[5]{3^5\times 2^5}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{\sqrt[3]{2^8}}} = \frac{2^3\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt{8}\times 3\sqrt[5]{2^5}}{3\sqrt{2}.\sqrt{2^2\times\sqrt[3]{2^2}}}$

$= \frac{8.\sqrt[3]{2}\times 2\sqrt{2}\times 3\times 2}{3\sqrt{2}.2\sqrt[6]{4}} = \frac{8\sqrt[3]{2}\times 2}{\sqrt[6]{4}} = \frac{16\times\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\sqrt{4}}} = \frac{16\times\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 16$

3) a) $(2+\sqrt{5})^3 = 2^3 + 3\times 2^2\sqrt{5} + 3\times 2\times(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^3$

$= 8 + 12\sqrt{5} + 30 + 5\sqrt{5} = 38 + 17\sqrt{5}$

b) $B = \sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} - \sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$ ← *n'a* pas de sens car $38-17\sqrt{5} < 0$

EX 18 :

1) $\sqrt[3]{x} = \sqrt[4]{2} \Leftrightarrow x = (\sqrt[4]{2})^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{8}$

$S_{\mathbb{R}} = \{\sqrt[4]{8}\}$

2) $\sqrt[5]{x^2} = \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow x^2 = (\sqrt[3]{3})^5 \Leftrightarrow x = \sqrt[6]{3^5}$ ou $x = -\sqrt[6]{3^5}$

$S_{\mathbb{R}} = \{\sqrt[6]{3^5}, -\sqrt[6]{3^5}\}$

3) $\sqrt[3]{x^2} - 3.\sqrt[3]{x} + 2 = 0$

dans $\mathbb{R}$:

$(E) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x})^2 - 3.\sqrt[3]{x} + 2 = 0$

on pose $t = \sqrt[3]{x}$

l'équation devient : $t^2 - 3t + 2 = 0$

$t' = 1$ et $t'' = 2$

$t = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

$t = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 8$

$S_{\mathbb{R}} = \{1, 8\}$

4) $(1-\sqrt[4]{x})^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt[4]{x} - 1)^3 = 8$

$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x} - 1 = 2 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x} = 3 \Leftrightarrow x = 3^4 \Leftrightarrow x = 81$

$S_{\mathbb{R}} = \{81\}$

EX 19 :

a) $\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x + 1) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

d'où $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{(x^2 - x + 1)} = +\infty$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2 + x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{\frac{\sin x}{x}} = 1$

d'où $\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{x^2+x}{\sin x}} = \sqrt[3]{1} = 1$

c) $\lim_{x\to+\infty} x - \sqrt[3]{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}.\left[\sqrt[3]{x^2} - 1\right] = +\infty$

d) on pose $f(x)=\sqrt[3]{x}$

f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$$

e) on pose $f(x)=\sqrt[3]{\cos x}$

f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$$f'(x)=\frac{-\sin x}{3.\sqrt[3]{\cos^2 x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x}=0$$

f) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}$

$$\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^3}}=\sqrt[12]{x^3}$$

$$\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^4}}=\sqrt[12]{x^4}$$

$$\sqrt{x}=\sqrt{\sqrt[6]{x^6}}=\sqrt[12]{x^6}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[12]{x^4}-\sqrt[12]{x^6}}{\sqrt[12]{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[12]{x^4}}{\sqrt[12]{x^3}}-\frac{\sqrt[12]{x^6}}{\sqrt[12]{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[12]{x}-\sqrt[12]{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[12]{x}.(1-\sqrt[12]{x^2})=-\infty$$

EX 20 :

$f(x)=x^2+\sqrt[4]{x}$; $x\in\mathbb{R}_+$

1) f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$$f'(x)=2x+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}>0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}x+\frac{1}{(\sqrt[4]{x})^3}=+\infty$$

f non dérivable à droite en 0

x	0	+∞
f '(x)	| +	
f(x)	0 →	+∞

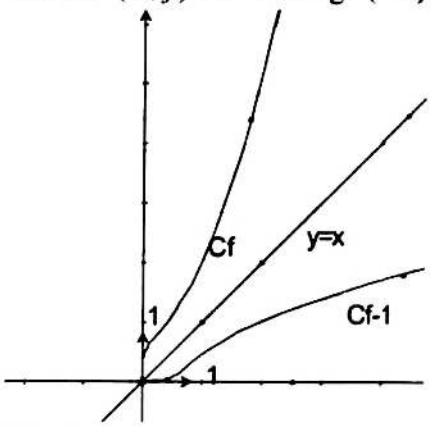
2) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

d'où f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur

$f(\mathbb{R}_+)=\left[f(0),\lim_{+\infty}f\right[=\mathbb{R}_+=J$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}x+\frac{1}{(\sqrt[4]{x})^3}=+\infty$

(ζ_f) admet une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$ au voisinage $(+\infty)$



EX 21 :

$f(x)=x.\sqrt[3]{x}$; $x\in\mathbb{R}_+$

1) $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x}=0$

d'où f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=0$

2) comme étant produit de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$, f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\sqrt[3]{x}+x\left(\frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}\right)=\frac{3\sqrt[3]{x}.(\sqrt[3]{x})^2+x}{3(\sqrt[3]{x})^2}$$

$$=\frac{4x}{3(\sqrt[3]{x})^2}=\frac{4(\sqrt[3]{x})^3}{3(\sqrt[3]{x})^2}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$$

$$Rq:\begin{pmatrix} f(x)=x^{4/3} \\ f'(x)=\frac{4}{3}x^{1/3}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}\end{pmatrix}$$

3) f '(x)>0 ; $\forall x\in]0,+\infty[$

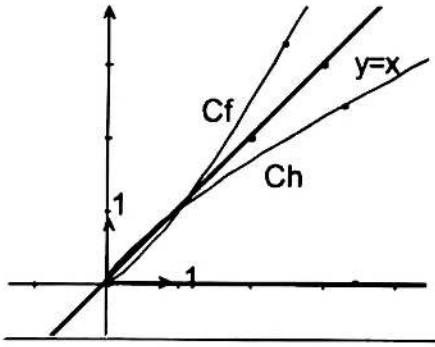
x	0	+∞
f '(x)	+	
f(x)	0 →	+∞

4) T : y=f '(1).(x-1)+f(1)

$T : y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}=+\infty$

(ζ) admet une B.P de direction celle de $(O,\vec{j})$



5) a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+)=[f(0),\lim_{+\infty} f[=\mathbb{R}_+$

b) $h=f^{-1}$

$h(1)=1$ car f(1)=1

f est dérivable en 1 et $f'(1)=\frac{4}{3}\neq 0$

d'où h est dérivable en f(1)=1

et $h'(1)=\frac{1}{f'(h(1))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{3}{4}$

c) $f(x)=x \Leftrightarrow x.\sqrt[3]{x}=x \Leftrightarrow x(\sqrt[3]{x}-1)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $\sqrt[3]{x}=1 \Leftrightarrow x=0$ ou x=1

$(\zeta)\cap\Delta=\{O(0,0);A(1,1)\}$

d) $(\zeta_h)=S_\Delta(\zeta)$

EX 22 :

$f(x)=\sqrt[4]{x^2-1}$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
x^2-1	+	0	0	+

$D_f=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

1) * $x\in D_f \Rightarrow x\leq -1$ ou $x\geq 1 \Rightarrow -x\geq 1$ ou $-x\leq -1$

$\Rightarrow x\in D_f$

* $f(-x)=\sqrt[4]{(-x)^2-1}=\sqrt[4]{x^2-1}=f(x)$

d'où f est paire

2) pour $x\geq 1$

$f(x)=\sqrt[4]{x^2(1-\frac{1}{x^2})}=\sqrt[4]{x^2}.\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}}=\sqrt{x}.\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}}$

b) * $\lim_{x\to+\infty}(x^2-1)=+\infty$ d'où $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x^2-1}=+\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

* $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}.\sqrt[4]{1-1/x^2}}{x}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}.\sqrt[4]{1-1/x^2}=0$

3) a) $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{x-1}$

$=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt[4]{x^2-1})^3}=\lim_{x\to1^+}\frac{x+1}{(\sqrt[4]{x^2-1})^3}=+\infty$

d'où f n'est pas dérivable à droite en 1

b) la fonction : $x\mapsto x^2-1$ est dérivable et strictement positive sur $]1,+\infty[$ d'où

f est dérivable sur $]1,+\infty[$

$f'(x)=\frac{2x}{4.(\sqrt[4]{x^2-1})^3}$

c) $f'(x)>0$; $\forall x\in]1,+\infty[$

x	1	$+\infty$
f '(x)	| +	
f(x)	0 →	$+\infty$

4) a) Δ: y=x

pour $x \geq 1$ on a :

$x^2-1 \leq x^2 \Rightarrow x^2-1 \leq x^4 \Rightarrow \sqrt[4]{x^2-1} \leq \sqrt[4]{x^4}$

$\Rightarrow f(x) \leq x$

d'où (ζ_f) est au dessous de Δ pour $x \geq 1$

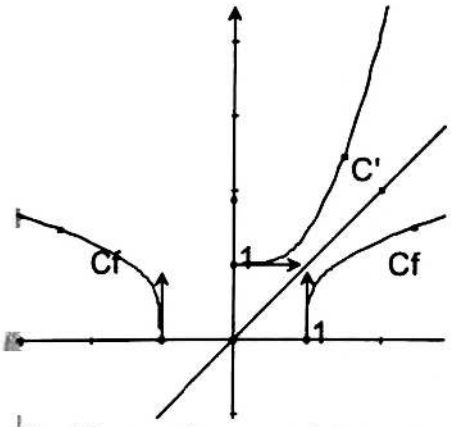
b) f est paire

(ζ_1) : la courbe de la restriction de f sur $[1,+\infty[$

$(\zeta_2) = S_{(O,\vec{i})}(\zeta_1)$

$(\zeta_f) = (\zeta_1) \cup (\zeta_2)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ (ζ_f) admet un B.P de direction $(O,\vec{i})$



5) a/ f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$

elle réalise donc une bijection de $[1,+\infty[$ sur

$f([1,+\infty[) = \left[f(1), \lim\limits_{x \to +\infty} f\right[= [0,+\infty[= \mathbb{R}_+$

b) * f est dérivable sur $]1,+\infty[$

et $f'(x) = \dfrac{2x}{4(\sqrt[4]{x^2-1})^3} \neq 0$

d'où f^{-1} est dérivable sur $f(]1,+\infty[) = \mathbb{R}_+^*$

* f n'est pas dérivable à droite en 1

d'où (ζ_f) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse $1 \Rightarrow (\zeta_{f^{-1}})$ admet une demi tangente horizontale au point d'abscisse f(1)=0

d'où f^{-1} est dérivable à droite en 0 et $(f^{-1})'_d(0)=0$

conclusion: f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

c) $(\zeta')=S_\Delta(\zeta_1)$

EX 23 :

$D_f = \mathbb{R}_+ \quad f(x) = \sqrt[3]{x} - \dfrac{x}{3} + 3$

1) a) pour x>0

$\sqrt[3]{x} = \dfrac{x.\sqrt[3]{x}}{x} = \dfrac{x\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x})^3} = \dfrac{x}{(\sqrt[3]{x})^2} = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$

d'où $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{x}{3} + 3 = x.\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{3}\right] + 3$

b) • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x.\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{3}\right] + 3 = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{x} = -\dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + \dfrac{1}{3}x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x} + 3 = +\infty$

(ζ_f) admet une branche parabolique de direction celle de la droite D: $y = \dfrac{-1}{3}x$ au voisinage $(+\infty)$

2) a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 + \dfrac{3}{x} = +\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0

b) • la fonction : $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

• la fonction : $x \mapsto \dfrac{-x}{3} + 3$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{3}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1\right]$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \; ; (x \in \mathbb{R}_+^*) \Leftrightarrow x = 1$

• $x>1 \Rightarrow x^2>1 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}>1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}<1 \Rightarrow f'(x)<0$

x	0		1		$+\infty$
g'(x)	|	+	0	-	
g(x)		↗	$\frac{11}{3}$	↘	$-\infty$
	3				

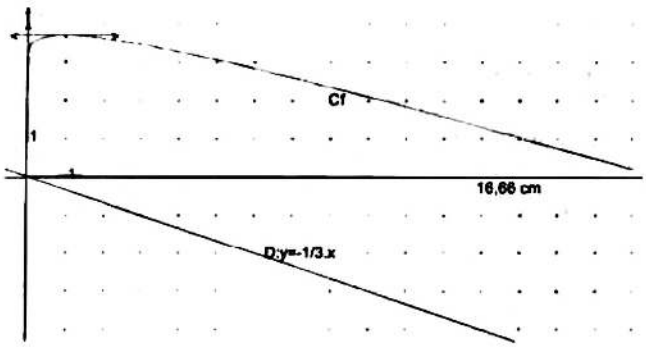
d) * f est continue et strictement croissante sur $[0,1[$ $f([0,1[)=[3,\frac{11}{3}[$, $0\notin[3,\frac{11}{3}[$ d'où l'équation : $f(x)=0$ n'a pas de solutions dans $[0,1[$

* f est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$, elle réalise donc une bijection de $[1,+\infty[$ sur $f([1,+\infty[)=]-\infty,\frac{11}{3}]$

comme $0\in]-\infty,\frac{11}{3}]$, alors il existe un unique réel $\alpha\in[1,+\infty[$ tel que $f(\alpha)=0$

conclusion : α est l'unique solution de l'équation $f(x)=0$ dans $\mathbb{R}_+^*$

$f(16,6).f(16,7)<0 \Rightarrow 16,6<\alpha<16,7$ (calculatrice)



EX 24 :

A/ $n\in\mathbb{N}^*$

$f_n(x)=x^{2n+1}+3x-2$

1) a) $f_n'(x)=(2n+1).x^{2n}+3>0$

x	$-\infty$	$+\infty$
f '(x)	+	
f(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

b) * pour $x\in D_{f_n}=\mathbb{R}$ on a $(-x)\in D_{f_n}$

* $f_n(-x)=(-x)^{2n+1}+3(-x)-2=-x^{2n+1}-3x-2$

$=-4-(x^{2n+1}+3x-2)=-4-f_n(x)$

conclusion : I(0,-2) est un centre de symétrie pour (ζ_n)

c) $f_n''(x)=2n(2n+1)x^{2n-1}$

f_n'' s'annule en 0 en changeant de signe

d'où I(0,-2) est un point d'inflexion de (ζ_n)

2) a) $f_{n+1}(x)-f_n(x)=x^{2n+3}-x^{2n+1}=x^{2n+1}.(x^2-1)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f_{n+1}(x)-f_n(x)$	-	0	+	0	-	0	+
Position relative	C_n/C_{n+1}		C_{n+1}/C_n		C_n/C_{n+1}		C_{n+1}/C_n
		B(-1,-6)		I(0,-2)		A(1,2)	

b) $(\zeta_n)\cap(\zeta_{n+1})=\{I(0,-2);A(1,2);B(-1,-6)\}$

3) a) f_n *est* continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$f_n(\mathbb{R})=\left]\lim_{-\infty}f_n,\lim_{+\infty}f_n\right[=\mathbb{R}$

b) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=(2n+1)x^{2n}+3\neq$ d'où f_n^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$(f_n^{-1})'(-6)=\frac{1}{f_n'(f^{-1}(-6))}=\frac{1}{f_n'(-1)}=\frac{1}{2(n+2)}$$

$$(f_n^{-1})'(2)=\frac{1}{f_n'(1)}=\frac{1}{2(n+2)}$$

$$(f_n^{-1})'(-2)=\frac{1}{f_n'(0)}=\frac{1}{3}$$

4) f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f_n(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

comme $0\in f_n(\mathbb{R})$ alors il existe un réel x_n tq $f_n(x_n)=0$

$f_n(0)\times f_n(\frac{2}{3})=(-2)(\frac{2}{3})^{2n+1}<0$

$\Rightarrow 0<x_n<\frac{2}{3}$

b) $f_n(x_n)=0 \Leftrightarrow x_n^{2n+1}+3x_n-2=0$

$$\Leftrightarrow 3x_n=2-x_n^{2n+1} \Leftrightarrow x_n=\frac{2-x_n^{2n+1}}{3}$$

c) $0\le x_n\le\frac{2}{3} \Rightarrow 0\le x_n^{2n+1}\le(\frac{2}{3})^{2n+1}$

d) $\lim_{n\to+\infty}(\frac{2}{3})^{2n+1}=0$ d'où $\lim_{n\to+\infty}x_n^{2n+1}=0$

$$x_n=\frac{2-x_n^{2n+1}}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{2-x_n^{2n+1}}{3}=\frac{2}{3}$$

B/ n=1

$f(x)=f_1(x)=x^3+3x-2$

$\alpha=x_1$

1) $\varphi(x)=-\dfrac{f(x)}{f'(x)}+x \qquad x\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$

a) $\varphi(x)=x-\dfrac{x^3+3x-2}{3x^2+3}=\dfrac{2x^3+2}{3(x^2+1)}=\dfrac{2}{3}.\left(\dfrac{x^3+1}{x^2+1}\right)$

pour $x\in\left[0,\frac{2}{3}\right] \Rightarrow 0\le x\le 1$

$\Rightarrow 0\le x^3\le x^2 \Rightarrow 0<1+x^3\le 1+x^2 \Rightarrow 0\le\dfrac{1+x^3}{1+x^2}\le 1$

$\Rightarrow 0\le\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1+x^3}{1+x^2}\right)\le\dfrac{2}{3}\Rightarrow 0\le\varphi(x)\le\dfrac{2}{3}$

φ est continue sur $\left[0,\frac{2}{3}\right]$ d'où $\varphi\left(\left[0,\frac{2}{3}\right]\right)\subset\left[0,\frac{2}{3}\right]$

b) $\varphi(x)-\alpha=(x-\alpha)^2\dfrac{(2x+\alpha)}{3(x^2+1)}$. *on* a : $f(\alpha)=0$

$$\varphi(x)-\alpha=x-\frac{f(x)}{f'(x)}-\alpha+\frac{f(\alpha)}{f'(x)}=(x-\alpha)-\frac{f(x)-f(\alpha)}{f'(x)}$$

$$=(x-\alpha)-\frac{(x^3-\alpha^3)+3(x-\alpha)}{3(1+x^2)}$$

$$=(x-\alpha)-\frac{(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2+3)}{3(1+x^2)}$$

$$=(x-\alpha).\left[1-\frac{(x^2+\alpha x+\alpha^2+3)}{3(1+x^2)}\right]$$

$$=(x-\alpha).\frac{2x^2-\alpha x-\alpha^2}{3(1+x^2)}$$

$$=(x-\alpha).\frac{2x^2+\alpha x-(2\alpha x+\alpha^2)}{3(1+x^2)}$$

$$=\frac{(x-\alpha)}{3(1+x^2)}.[x(2x+\alpha)-\alpha(2x+\alpha)]$$

$$=\frac{(x-\alpha)(x-\alpha)(2x+\alpha)}{3(1+x^2)}=\frac{(x-\alpha)^2(2x+\alpha)}{3(1+x^2)}$$

c) $0\le x\le\frac{2}{3}$ et $0\le\alpha\le\frac{2}{3}$

$\Rightarrow|x-\alpha|\le\frac{2}{3}$

$0\le 2x\le\frac{4}{3}\Rightarrow 0\le 2x+\alpha\le 2$

$\Rightarrow(2x+\alpha)|x-\alpha|\le\frac{4}{3}$

$1+x^2\ge 1\Rightarrow\dfrac{1}{1+x^2}\le 1\Rightarrow\dfrac{1}{3(1+x^2)}\le\frac{1}{3}$

d'où $\dfrac{(2x+\alpha)|x-\alpha|}{3(1+x^2)}\le\dfrac{4}{9}\le\dfrac{2}{3}$

d) $|\varphi(x)-\alpha|=\dfrac{(2x+\alpha)|x-\alpha|}{3(1+x^2)}.|x-\alpha|$

or $\dfrac{(2x+\alpha)|x-\alpha|}{3(1+x^2)}\le\dfrac{2}{3}$

d'où $|\varphi(x)-\alpha|\le\dfrac{2}{3}|x-\alpha|$

2) $\begin{cases}U_0=0\\U_{n+1}=\varphi(U_n)\end{cases}$

a) * pour n=0 , $0\le U_0\le\dfrac{2}{3}$ (vrai)

* supposons que : $0\le U_n\le\dfrac{2}{3}$

* montrons que : $0\le U_{n+1}\le\dfrac{2}{3}$

$U_n\in\left[0,\dfrac{2}{3}\right]\Rightarrow\varphi(U_n)\in\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$ d'aprés B/1)a)

$\Rightarrow U_{n+1}\in\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$

conclusion : $0\le U_n\le\dfrac{2}{3}$; $\forall\, n\in\mathbb{N}$

b) d'aprés 1) d) $|\varphi(U_n)-\alpha|\le\dfrac{2}{3}|U_n-\alpha|$

$\Rightarrow|U_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{2}{3}|U_n-\alpha|$

c) $|U_1-\alpha|\le\dfrac{2}{3}|U_0-\alpha|$

$|U_2-\alpha|\le\dfrac{2}{3}|U_1-\alpha|$

.....

.....

$|U_n-\alpha|\le\dfrac{2}{3}|U_{n-1}-\alpha|$

multiplions membre par membre et simplifions on aura:

$$|U_n-\alpha|\le(\frac{2}{3})^n|0-\alpha|$$

$$|U_n-\alpha|\le(\frac{2}{3})^n\alpha$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{3})^n.\alpha=0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}(U_n-\alpha)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}U_n=\alpha$

vérifier que : $f(\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1})=0$

EX 25 :

partie A :

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\quad;\ \forall x\in[0,1[$$

1) a) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\frac{x}{1-x}}=0$

d'où f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0)=0$

b) f est dérivable sur $]0,1[$

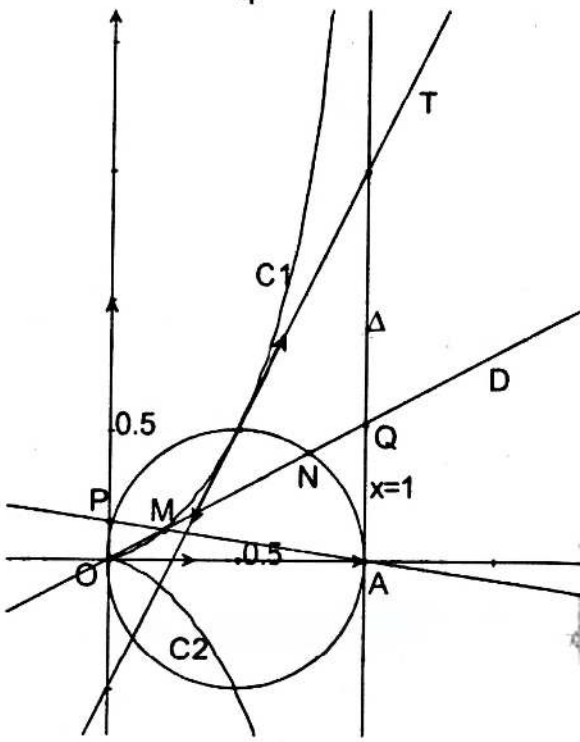
$$f'(x)=\frac{(\frac{x^3}{1-x})'}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}=\frac{\frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}=\frac{3x-2x^2}{2(1-x)\sqrt{x-x^2}}$$

x	0		1
f '(x)		+	
f(x)	0	↗	+∞

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}=+\infty$$

c) T: $y=f'(\frac{1}{2}).(x-\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})$

$$T: y=2x+\frac{1}{4}$$



2) $C_2=S_{(Ox)}(C_1)$

3) $C=C_1\cup C_2$

$$M(x,y)\in C\Leftrightarrow y=\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\ \ ou\ y=-\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$$

$$\Leftrightarrow y^2=\frac{x^3}{1-x}\ \Leftrightarrow x^3=y^2-xy^2$$

$$\Leftrightarrow x.(x^2+y^2)-y^2=0$$

Partie B : A(1,0)

1) $\Delta: x=1$

$(\zeta): (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

2) D:y=m.x

3) a) $N(x,y) \in D \cap \zeta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=m.x \\ (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = m.x & (1) \\ (x-\frac{1}{2})^2 + m^2.x^2 = \frac{1}{4} & (2) \end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow x^2 - x + m^2x^2 = 0 \Leftrightarrow x\left[(1+m^2)x - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x=\frac{1}{1+m^2}$

or $N \neq O$

d'où $x=\frac{1}{1+m^2}$ et $y=\frac{m}{1+m^2}$

$N(\frac{1}{1+m^2}, \frac{m}{1+m^2})$

b) on a : Q(1,m)

$\overline{OM} = \overline{NQ}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = x_Q - x_N \\ y_M = y_Q - y_N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{m^2}{1+m^2} \\ y_M = \frac{m^3}{1+m^2} \end{cases}$$

c) $x_M.(x_M^2 + y_M^2) - y_M^2 = 0$

d'où $M \in C$

4) $M(x,y) \in C \Leftrightarrow x(x^2+y^2)-y^2=0$

a) pour x=0 on aura y=0 ; $M=O \in (\Gamma)$

b) $x \neq 0$; $m=\frac{y}{x} \rightarrow y=mx$

$x.(x^2+y^2)-y^2=0$ d'où $x(x^2 + m^2x^2) - m^2x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2.\left[(1+m^2)x - m^2\right] = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{m^2}{1+m^2}$ (car $x \neq 0$) et $y=\frac{m^3}{1+m^2}$

$M \in (\Gamma)$ d'aprés 3) b)

c) $\left.\begin{array}{l} M \in (\Gamma) \Rightarrow M \in C \\ M \in C \Rightarrow M \in (\Gamma) \end{array}\right\}$ d'où $(\Gamma)=C$

partie C :

$t > 0$. $D_t : y = t.x$

d'aprés B/ on a : $M(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2})$

A(1,0) $P(0,y_p)$

$\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix} -1 \\ y_p \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} \frac{-1}{1+t^2} \\ \frac{t^3}{1+t^2} \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AM})=0 \Leftrightarrow \frac{-t^3}{1+t^2} + \frac{y_p}{1+t^2} = 0 \Leftrightarrow y_p = t^3$

d'où $P(0,t^3)$

b) A(1,0) ; Q(1,t)

$AQ=\sqrt{0^2+t^2} = |t| = t$

2) $OP=t^3$ et $AQ=t$

$AQ^3 = OP$

$AQ = \sqrt[3]{OP}$

prenons OP=t on aura $AQ=\sqrt[3]{t}$

EX 26 :

partie A :

$f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$; $x \in [0,1]$

1) a) f est dérivable sur $[0,1]$

$f'(x)=\frac{\pi}{2}.\cos(\frac{\pi}{2}x)$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{2}x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow f'(x) \geq 0$

x	0		1
f '(x)		+	0
f(x)	0	↗	1

f est continue et strictement croissante sur [0,1] elle réalise donc une bijection de [0,1] sur f([0,1])=[f(0),f(1)]=[0,1]

b) $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2} \Rightarrow f^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}$

2) a) f est dérivable sur $[0,1[$

et $f'(x) = \frac{\pi}{2}.\cos(\frac{\pi}{2}x) \neq 0 \forall x \in [0,1[$

d'où f^{-1} est dérivable sur $f([0,1[) = [0,1[$

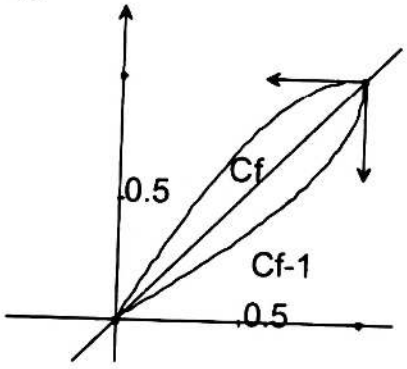
b) $(f^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\frac{1}{2}))} = \frac{1}{f'(\frac{1}{3})} = \frac{4}{\pi.\sqrt{3}}$

c) $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)}$ (avec $y=f^{-1}(x)$; $f(y)=x$)

$= \frac{2}{\pi\cos(\frac{\pi}{2}.y)} = \frac{2}{\pi\sqrt{1-\sin^2(\frac{\pi}{2}y)}}$ (car $\cos(\frac{\pi}{2}y) > 0$)

$= \frac{2}{\pi.\sqrt{1-f^2(y)}} = \frac{2}{\pi.\sqrt{1-x^2}}$

3)



4) $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$

a) pour $1 \leq k \leq n$

$\frac{1}{n^2} \leq \frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow f(\frac{1}{n^2}) \leq f(\frac{k}{n^2}) \leq f(\frac{1}{n})$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f(\frac{1}{n^2}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(\frac{1}{n})$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f(\frac{1}{n^2}) \leq V_n \times n \leq \sum_{k=1}^{n} f(\frac{1}{n})$

$\Rightarrow n.f(\frac{1}{n^2}) \leq n.V_n \leq n.f(\frac{1}{n})$

$\Rightarrow f(\frac{1}{n^2}) \leq V_n \leq f(\frac{1}{n})$

b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0^+$ f est continue en 0 à droite

d'où $\lim_{n\to+\infty} f(\frac{1}{n}) = f(0) = 0$

de meme : $\lim_{n\to+\infty} f(\frac{1}{n^2}) = 0$

d'où $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$

5) on pose $\varphi(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{\pi}{2}.x$

φ est dérivable sur $]0,1[$

$\varphi'(x) = -\left[\frac{f'(x)}{f^2(x)} + \frac{\pi}{2}\right] < 0$

φ est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$

elle réalise donc une bijection de $]0,1[$

sur $\varphi(]0,1[) = \left]\lim_{1^-}\varphi, \lim_{1^+}\varphi\right[= \left]1-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$

comme $0 \in \left]1-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$ *,alors* il existe un unique réel

α tq $\varphi(\alpha)=0$

par suite l'équation : $\frac{1}{f(x)} = \frac{\pi}{2}x$ admet α comme

unique solution dans $]0,1[$

$\varphi(\frac{1}{2}) = \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$

$\varphi(\left]\frac{1}{2},1\right[) = \left]1-\frac{\pi}{2}, \sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\right[$

comme $0 \in \varphi(\left]\frac{1}{2},1\right[)$ alors $\alpha \in \left]\frac{1}{2},1\right[$

partie B :

1) $g(x)=f^{-1}(\sin x)+f^{-1}(\cos x)$

a) la fonction : $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

et $\sin\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=]0,1[$

comme f^{-1} est dérivable sur $]0,1[$ alors:

la fonction : $x \mapsto f^{-1}(\sin x)$ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

• de meme la fonction : $x \mapsto f^{-1}(\cos x)$ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

par suite g est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$g'(x)=\cos x.(f^{-1})'(\cos x)-\sin x.(f^{-1})'(\cos x)$

$=\frac{2\cos x}{\pi.\sqrt{1-\sin^2 x}}-\frac{2\sin x}{\pi\sqrt{1-\cos^2 x}}=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}=0$

b) $g'(x)=0 \quad ; \forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

g est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

d'où g est constante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

d'où $g(x)=1 \quad ; \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow f^{-1}(\sin x)+f^{-1}(\cos x)=1$

2) $h(x)=2x.\sqrt{1-x^2} \quad ; x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$

a) $h'(x)=2\sqrt{1-x^2}+2x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)$

$=\frac{2(1-x^2)-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

x	0	½
h '(x)	+	
h(x)	0 ↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) h est continue et strictement croissante sur $[0,½]$

$\Rightarrow h([0,½])=[h(0),h(½)]=\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

3) $k(x)=f^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

$k(x)=f^{-1}\circ h(x)$

h est dérivable sur $[0,½]$ et $h([0,½])=\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

comme f^{-1} est dérivable sur $\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

alors $k=f^{-1}\circ h$ est dérivable sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

$k'(x)=h'(x).(f^{-1})'(h(x))=\frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}.\frac{2}{\pi\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}}$

$=\frac{2(2-4x^2)}{\pi.\sqrt{1-x^2}.\sqrt{(1-2x^2)^2}}=\frac{4.(1-2x^2)}{\pi(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}}$

$=\frac{4}{\pi.\sqrt{1-x^2}}$

$k'(x)=2(f^{-1})'(x)$

$k(x)=2f^{-1}(x)+c \quad ; \forall x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$

$k\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2.f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+c \Rightarrow 1=1+c \Rightarrow c=0$

d'où $f^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})=2.f^{-1}(x)$

EX 27 :

partie A :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) pour x>0

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1+x^2-1}{x(1+\sqrt{1+x^2})}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}=0=f(0)$

$\Rightarrow f$ est continue à droite en 0

b) pour x>0

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x^2}$$

$$=\frac{(1+x^2)-1}{x^2\left[1+\sqrt{1+x^2}\right]}=\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}=f_d'(0)$$

c) T:$y=\frac{1}{2}x$; $x\geq 0$

pour x>0

$$f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}-\frac{1}{2}x=\frac{2\sqrt{1+x^2}-(2+x^2)}{2x}$$

$$f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{2(1+x^2)-(2+x^2)^2}{2x\left[2\sqrt{1+x^2}+(2+x^2)\right]}$$

$$f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{-x^3}{2\left[2\sqrt{1+x^2}+(2+x^2)\right]}\leq 0$$

(ζ_f) est au dessous de (T)

d) pour x>0

$$f'(x)=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}x-(-1+\sqrt{1+x^2})}{x^2}$$

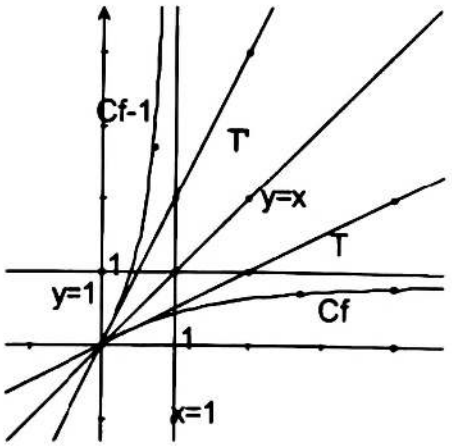
$$f'(x)=\frac{x^2-\sqrt{1+x^2}(-1+\sqrt{1+x^2})}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}>0 \quad \text{car } 1+x^2>1$$

x	0	+∞
f '(x)	+	
f(x)	0 ↗	1

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)=1$$

e) y=1 est une asymptote à (ζ_f) au voisinage (+∞)



2) a) f est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$

elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur J

J=f($\mathbb{R}_+$) = $[0,1[$

b) on pose : $y=f^{-1}(x)$ $x\in]0,1[$, $y\in\mathbb{R}_+^*$

$$\Leftrightarrow f(y)=x\Leftrightarrow\frac{\sqrt{1+y^2}-1}{y}=x\Leftrightarrow\sqrt{1+y^2}=xy+1$$

$$\Leftrightarrow 1+y^2=x^2y^2+2xy+1\Leftrightarrow y\left[(1-x^2)y-2x\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (1-x^2)y=2x \text{ car } y\neq 0$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{2x}{1-x^2} \quad \text{pour } x=0\rightarrow y=0$$

d'où $f^{-1}(x)=\frac{2x}{1-x^2}$; $\forall x\in[0,1[$

c) $(\zeta_{f^{-1}})=S_\Delta(\zeta_f)$ avec Δ:y=x

partie B :

$g(x)=f(x)$ pour $x\in[0,1]$

$$\begin{cases}U_0=1\\U_{n+1}=g(U_n)\end{cases}$$

1) a) * pour n=0 ,on a : $0\leq U_0\leq 1$ (vrai)

* supposons que : $0\leq U_n\leq 1$

* montrons que : $0\leq U_{n+1}\leq 1$

$0\leq U_n\leq 1\Rightarrow g(0)<g(U_n)\leq g(1)$

car g est strictement croissante sur $[0,1]$

d'où $0<U_{n+1}\leq\sqrt{2}-1\leq 1$

conclusion : $0\leq U_n\leq 1$;∀ n ∈ ℕ

b) pour $x \in]0;1]$

$g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \frac{(1+x^2)-1}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$

$f(x) \le \frac{1}{2}x$ d'aprés 1) c)

$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x$ d'où $g(U_n) \le \frac{1}{2}U_n$

$\Rightarrow U_{n+1} \le \frac{1}{2}U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) * pour n=0 $U_0 = 1 \le \frac{1}{2^0} = 1$ (vrai)

* supposons que $U_n \le (\frac{1}{2})^n$

* montrons que : $U_{n+1} \le (\frac{1}{2})^{n+1}$

n a : $U_{n+1} \le \frac{1}{2}U_n$ et $U_n \le (\frac{1}{2})^n \Rightarrow U_{n+1} \le (\frac{1}{2})^{n+1}$

onclusion : $U_n \le \frac{1}{2^n}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

$0 \le U_n \le (\frac{1}{2})^n$

$\lim_{+\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$ d'où $\lim_{x \to +\infty} U_n = 0$

) a) $U_{n+1} = f(U_n) \Rightarrow U_n = f^{-1}(U_{n+1})$

$= \frac{2U_{n+1}}{1-(U_{n+1})^2}$

b) * pour n=0 , $U_0 = 1 = tg(\frac{\pi}{2^{0+2}})$ (vrai)

* supposons que : $U_n = tg(\frac{\pi}{2^{n+2}})$

* montrons que : $U_{n+1} = tg(\frac{\pi}{2^{n+3}})$

$U_{n+1} = g(U_n) = \frac{U_n}{1+\sqrt{1+U_n^2}}$

$= \frac{U_n}{1+\sqrt{1+tg^2(\frac{\pi}{2^{n+2}})}}$ $\quad (1+\text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x})$

$U_{n+1} = \frac{U_n}{1+\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{2^{n+2}})}} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2^{n+2}}).tg(\frac{\pi}{2^{n+2}})}{1+\cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})}$

$= \frac{\sin(\frac{\pi}{2^{n+2}})}{2\cos^2(\frac{\pi}{2^{n+2}})} = \frac{2\sin(\frac{\pi}{2^{n+3}})\cos(\frac{\pi}{2^{n+3}}).}{2\cos^2(\frac{\pi}{2^{n+3}})}$

car : $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$; $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

d'où $U_n = tg(\frac{\pi}{2^{n+3}})$

conclusion : $U_n = tg(\frac{\pi}{2^{n+2}})$; $\forall n \in \mathbb{N}$

3) $V_n = 2^n.U_n = 2.tg(\frac{\pi}{2^{n+2}}) = 2^n tg(\frac{1}{2^n}.\frac{\pi}{4})$

$V_n = \frac{tg(\frac{1}{2^n}.\frac{\pi}{4})}{1/2^n} = h(\frac{1}{2^n})$ avec $h(x) = \frac{\text{tg}(\frac{\pi}{4}x)}{x}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

$\lim_{n \to 0} \frac{tg(\frac{\pi}{4}x)}{x} = \frac{\pi}{4}$

d'où $\lim_{x \to +\infty} V_n = \frac{\pi}{4}$

EX 28 :

partie A :

$f(x)=\sqrt{1+tgx}$; $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

1) a) * pour $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$, $tgx>-1 \Rightarrow 1+tgx>0$

* la fonction : $x\mapsto 1+tgx$ est dérivable et strictement positive sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

d'où f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

* $f'(x)=\frac{1+tg^2x}{2\sqrt{1+tgx}}$

b) $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

$$\frac{f(x)-f(-\frac{\pi}{4})}{x+\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{1+tgx}}{x+\frac{\pi}{4}}=(\frac{1+tgx}{x+\frac{\pi}{4}}).\frac{1}{\sqrt{1+tgx}}$$

* $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+}\frac{1}{\sqrt{1+tgx}}=+\infty$

* on pose : $\varphi(x)=1+tgx$; φ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

et $\varphi'(x)=1+tg^2x$

$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+}\frac{1+tgx}{x+\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(-\frac{\pi}{4})}{x+\frac{\pi}{4}}=\varphi'(-\frac{\pi}{4})=2$$

$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+}\frac{f(x)-f(-\frac{\pi}{4})}{x+\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+}(\frac{1+tgx}{x+\frac{\pi}{4}}).\frac{1}{\sqrt{1+tgx}}=+\infty$$

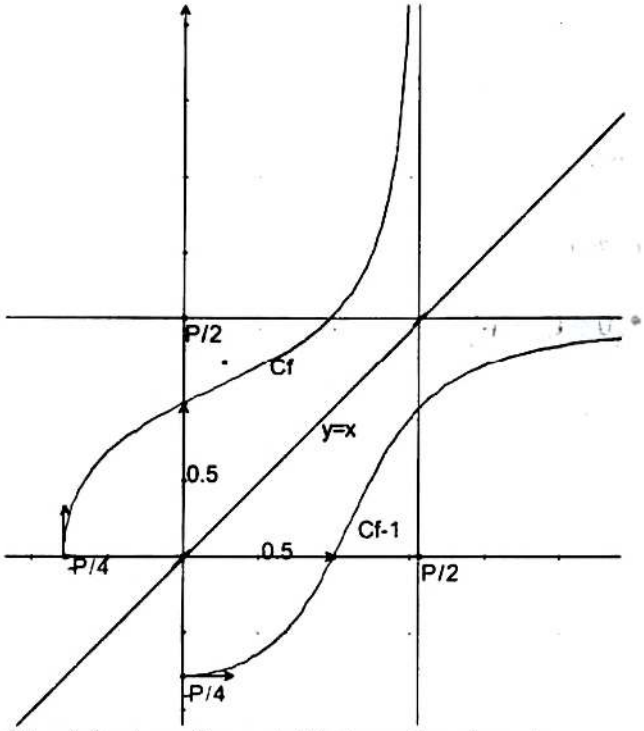
f n'est pas dérivable en $(-\frac{\pi}{4})$ à droite

* (ζ_f) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse $(-\frac{\pi}{4})$

c) pour $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

$$f'(x)=\frac{1+tg^2x}{2\sqrt{1+tgx}}>0$$

x	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f '(x)	|	+	
f(x)	0	↗	$+\infty$



2) a) f est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ elle réalise donc une bijection de $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ sur $J=[0,+\infty[$

b) $g=f^{-1}$

$f(-\frac{\pi}{4})=0\to g(0)=-\frac{\pi}{4}$

$f(0)=1\to g(1)=0$

$f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\to g(\sqrt{2})=\frac{\pi}{4}$

c) $(\zeta_g)=S_\Delta(\zeta_f)$ avec Δ : y=x(voir figure)

3) (ζ_g) admet une demi tangente horizontale au point d'abscisse 0

$\Rightarrow$ g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0)=0$

* f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

et $f'(x)=\frac{1+tg^2x}{2\sqrt{1+tgx}}\neq 0$

d'où g est dérivable sur $f\left(\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\right)=]0,+\infty[$

conclusion : g est dérivable sur $J=[0,+\infty[$

pour $x\in]0,+\infty[$

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$$

soit $y=g(x)$, $f(y)=x$; $\sqrt{1+tgy}=x, tgy=x^2-1$

$$g'(x)=\frac{2\sqrt{1+tgy}}{1+tg^2y}=\frac{2\sqrt{1+x^2-1}}{1+(x^2-1)^2}=\frac{2|x|}{x^4-2x^2+2}$$

$$g'(x)=\frac{2x}{x^4-2x^2+2} \quad car\ x>0$$

* $g'_d(0)=0=\frac{2\times 0}{0^4-2\times 0^2+2}$

d'où $g'(x)=\frac{2x}{x^4-2x^2+2}$; $\forall x\in\mathbb{R}_+$

4) $U_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}g(k)$; $(n\in\mathbb{N})$

a) f est strictement croissane sur $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

d'où g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

$n\le k\le 2n\Rightarrow g(n)\le g(k)\le g(2n)$

$$\Rightarrow\sum_{k=n}^{2n}g(n)\le\sum_{k=n}^{2n}g(k)\le\sum_{k=n}^{2n}g(2n)$$

$$\Rightarrow (n+1).g(n)\le (n+1).U_n\le (n+1).g(2n)$$

$$\Rightarrow g(n)\le U_n\le g(2n)$$

b) $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}g(n)=\lim_{n\to+\infty}(2n)=\frac{\pi}{2}$$

d'où $\lim_{x\to+\infty}U_n=\frac{\pi}{2}$

partie B :

$$h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}g\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) & \text{si } x>0\\ \frac{\pi}{4} & \text{si } x=0\end{cases}$$

1) a) * h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

comme étant composée de 2 fonctions continues

* continuité en 0: $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\frac{\pi}{2}$

d'où $\lim_{x\to 0^+}h(x)=\frac{\pi}{4}=h(0)$

h est continue à droite en 0

conclusion : h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) la fonction : $x\mapsto 1+\frac{1}{x}$ est dérivable

et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$

d'où la fonction U: $x\mapsto\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$U(\mathbb{R}_+^*)=]1,+\infty[$

comme g est dérivable sur $]1,+\infty[$

alors h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$$h'(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)'.g'\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\right].g'\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$$

$$g'\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^4-2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^2+2}=\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

d'où $h'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right)=\frac{-1}{2(x^2+1)}$

2) a) $x>0$

h est continue sur [0,x] et dérivable sur]0,x[.

d'a^prés le théorème des accroissements finis il existe $c\in]0,x[$

tq : $h(x)-h(0)=(x-0)h'(c)\Leftrightarrow h(x)-\frac{\pi}{4}=\frac{-x}{2(1+c^2)}$

b) pour x>0

$$\frac{h(x)-h(0)}{x}=\frac{-1}{2(1+c^2)}$$

lorsque $x \to 0^+$

$c \to 0^+$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{c\to 0^+}\frac{-1}{2(1+c^2)}=-\frac{1}{2}$$

d'où h est dérivable à droite en 0 et $h_d'(0)=-\frac{1}{2}$

c) $h'(x)=\frac{-1}{2(1+x^2)}<0$

x	0	$+\infty$
h '(x)	-	
h(x)	$\frac{\pi}{4}$ ↘	0

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=1$$

d'où $\lim_{x\to+\infty} h(x)=\frac{1}{2}g(1)=0$

3) $h(x)=x \Leftrightarrow h(x)-x=0$

pour $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $\psi(x)=h(x)-x$

$$\psi'(x)=\frac{-1}{2(1+x^2)}-1<0$$

$$\psi(0)=\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\psi(x)=\lim_{x\to+\infty}h(x)-x=-\infty$$

ψ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$,

elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur

$$\psi(\mathbb{R}_+)=\left]-\infty,\frac{\pi}{4}\right]$$

comme $0 \in \psi(\mathbb{R}_+)$

alors il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_+$

tq $\psi(\alpha)=0$

$$\psi(0)=\frac{\pi}{4}$$

$$\psi(1)=\frac{1}{2}g(\sqrt{2})-1=\frac{\pi}{8}-1$$

$\psi(0)\times\psi(1)<0 \Rightarrow 0<\alpha<1$

b) $|h'(x)|=\frac{1}{2(1+x^2)}$

$$x^2\geq 0 \Rightarrow 1+x^2\geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2}\leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2(1+x^2)}\leq\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |h'(x)|\leq\frac{1}{2}$$

4) $\begin{cases} V_0 \in \mathbb{R}_+ / \{\alpha\} \\ V_{n+1}=h(V_n) \end{cases}$

a) h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $|h'(x)|\leq\frac{1}{2}$

α et $V_n \in \mathbb{R}_+$

d'aprés le théorème des inégalités

des accroissements finis :

$$|h(V_n)-h(\alpha)|\leq\frac{1}{2}|V_n-\alpha|$$

$$\Rightarrow |V_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|V_n-\alpha|$$

b) $|V_1-\alpha|\leq\frac{1}{2}|V_0-\alpha|$

$|V_2-\alpha|\leq\frac{1}{2}|V_1-\alpha|$

$|V_3-\alpha|\leq\frac{1}{2}|V_2-\alpha|$

.....

.....

$|V_n-\alpha|\leq\frac{1}{2}|V_{n-1}-\alpha|$

multiplions membre à membre et simplifions on aura:

$$|V_n-\alpha|\leq(\frac{1}{2})^n|V_0-\alpha|$$

$\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^n|V_0-\alpha|=0$ d'où $\lim_{n\to+\infty}(V_n-\alpha)=0$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} V_n=\alpha$